Vorlesung

SPEZIELLE PROBLEME DER VORSPANNUNG

Vorspannung und Querbeanspruchung
exzentrisch belasteter, gekrümmter und
schief gelagerter Betontragwerke

Prof. Dr. Hugo Bachmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Abteilung für Bauingenieurwesen

Vorlesung

SPEZIELLE PROBLEME DER VORSPANNUNG

Vorspannung und Querbeanspruchung
exzentrisch belasteter, gekrümmter und
schief gelagerter Betontragwerke

Prof. Dr. Hugo Bachmann

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Abteilung für Bauingenieurwesen

Zürich 1997

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	
1. VORSPANNUNG FUER BIEGUNG, QUERKRAFT UND TORSION	1
1.1 Grundlagen	1
1.1.1 Statische Deutung des Lastfalls Vorspannung	2
1.1.2 Schnittkräfte bei allgemeinem Spanngliedverlauf	5
1.1.3 Einfluss einer Trägerkrümmung	10
1.1.4 Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion	14
1.2 Formtreue Vorspannung	18
1.2.1 Definition und Grundgleichungen	18
1.2.2 Statisch bestimmte Systeme	20
1.2.3 Statisch unbestimmte Systeme	39
1.3 Praktische Vorspannung	42
1.3.1 Allgemeines	42
1.3.2 Vorgehen beim Entwerfen der Spannglieder	44
1.3.3 Grundfälle	44
1.3.4 Praktische Beispiele	57
1.3.5 Folgerungen	77
2. BEANSPRUCHUNG IN QUERRICHTUNG	78
2.1 Grundlagen	78
2.2 Rechteckquerschnitt	79
2.3 Einzelliger Kastenquerschnitt mit vertikalen Stegen	82
2.4 Einzelliger Kastenquerschnitt mit geneigten Stegen	88
2.5 Einzelliger Querschnitt mit gekrümmten Wänden	92
2.6 Mehrzelliger Kastenquerschnitt	95
2.7 Offener Querschnitt	98
2.8 Gekrümmter Träger	99
2.9 Kastenträger mit gekrümmter Druckplatte	107
LITERATURVERZEICHNIS	108
ANHANG	110

Vorwort

Das übergeordnete Ziel dieser Vorlesung ist ein vertieftes Verständnis des Lastfalls Vorspannung durch die Behandlung von exzentrisch belasteten, gekrümmten und schief gelagerten Stabtragwerken. Der Studierende der Vertiefungsrichtung Konstruktion soll befähigt werden, bei vorgespannten Tragwerken auch nichtalltägliche Probleme zu erkennen und zu beherrschen.

Im ersten Teil "Vorspannung für Biegung, Querkraft und Torsion" wird vorerst die formtreue Vorspannung von statisch bestimmten und statisch unbestimmten Systemen behandelt. Anschliessend werden für die praktische Vorspannung wichtige Grundfälle bereitgestellt und auf konkrete Beispiele angewendet.

Im zweiten Teil "Beanspruchung in Querrichtung" werden Querbeanspruchungen der Stabquerschnitte behandelt. Dabei stehen Querzug und Querbiegung im Vordergrund.

Vielfach werden Fragestellungen behandelt oder Lösungen gegeben, die bisher in der Literatur noch kaum zu finden sind. Daher ist manches noch unfertig und entwicklungsfähig. Für Kritik und Anregungen bin ich dankbar.

Bei der Ausarbeitung der Autographie wurde ich von Herrn Dr. R. Dieterle, dipl. Bauing. ETH, unterstützt. Frau S. Burki schrieb die Druckbogen und Herr L. Sieger fertigte die Zeichnungen an. Für ihre wertvolle Arbeit spreche ich den Genannten meinen besten Dank aus.

Zürich, September 1990 Prof. Dr. H. Bachmann

1. Vorspannung für Biegung, Querkraft und Torsion

Dem vorgespannten Beton liegt die Idee zugrunde, mit der Vorspannung den Schnittkräften aus äusseren Lasten entgegenzuwirken. Bei einer modernen Bemessung wird meist angestrebt, durch die Vorspannung gerade die Biegemomente aus ständiger Last - oder einen Teil derselben - zu kompensieren. Für die Biegemomente aus Verkehrslasten stehen dann die Regeln der teilweisen Vorspannung zur Verfügung. Sind gleichzeitig wesentliche Torsionsmomente vorhanden, so gelingt es in manchen Fällen, auch diese ganz oder teilweise und ohne irgendwelchen Mehraufwand zu kompensieren.

Ziel dieses Kapitels ist es, einfache und übersichtliche Methoden zu entwickeln für den Entwurf einer zweckmässigen Spanngliedführung und für die Dimensionierung dieser Spannglieder bei exzentrisch belasteten, gekrümmten und schief gelagerten Stabtragwerken. Beim Entwerfen und Dimensionieren der Spannglieder soll sozusagen "mit wenigen Handgriffen" alles Wesentliche erfasst werden können. Hiezu sind ein vertieftes Verständnis grundlegender Zusammenhänge, aber auch gewisse Vereinfachungen und Näherungen erforderlich. Kontrollen und genauere Nachweise können anschliessend auf herkömmliche Art, meist mittels Computerprogrammen, durchgeführt werden.

1.1 Grundlagen

Es sollen die üblichen Annahmen der elastischen Stabstatik und der Festigkeitslehre, wie sie normalerweise bei der Berechnung von Spannbetontragwerken verwendet werden, Gültigkeit haben. Bei den im Grundriss gekrümmten Stäben wird eine nicht allzu starke, kreisförmige Krümmung vorausgesetzt. Der Krümmungsradius soll nicht kleiner als die Spannweite sein.

Koordinatensysteme:

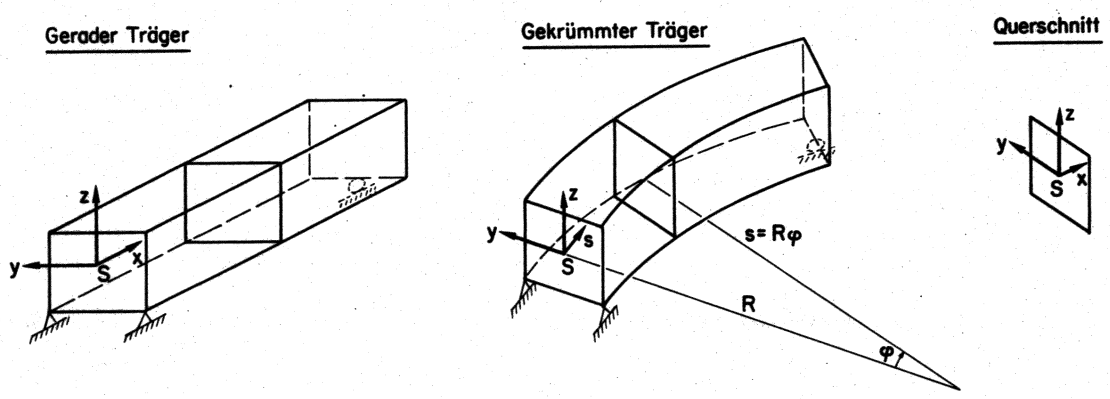


Bild 1: Koordinatensysteme

Bei Berechnungen an einem ganzen Stab wird das Axenkreuz x, y, z als fest (z.B. am Stabende) angenommen. Bei den kreisförmig gekrümmten Trägern wird anstelle der Koordinate x die Bogen-Koordinate $s = R \cdot \varphi$ verwendet.

Bei Betrachtung eines einzelnen Querschnittes wird das Axenkreuz x, y, z als mitlaufend angenommen.

Vorzeichenkonventionen:

Vektorgrössen, insbesondere Kräfte, sind positiv, wenn sie so wirken wie sie gezeichnet sind (Pfeilrichtung).

In Bild 2 sind die an einem Balkenelement angreifenden Schnittkräfte mit positivem Vorzeichen eingetragen.

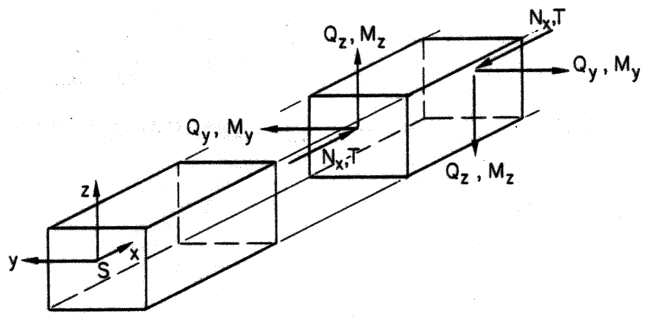


Bild 2: Vorzeichenkonvention für Schnittkräfte

1.1.1 Statische Deutung des Lastfalls Vorspannung

Der Lastfall Vorspannung von Betontragwerken kann auf zwei verschiedene Arten gedeutet werden:

1. Vorspannung als Eigenspannungszustand
2. Vorspannung als Wirkung von Anker-, Umlenk- und Reibungskräften

   Die Spannglieder üben auf den Beton drei verschiedene Arten von Kräften aus:

   a) Ankerkräfte (A)
   b) Umlenkkräfte (u)
   c) Reibungskräfte (r)

Die Deutung der Vorspannung als Eigenspannungszustand kann nur bei statisch bestimmten Systemen (bzw. bei statisch bestimmten Grundsystemen von statisch unbestimmten Systemen) angewendet werden. Die Deutung der Vorspannung als Wirkung von Anker-, Umlenk- und Reibungskräften ist sowohl bei statisch bestimmten als auch bei statisch unbestimmten Systemen anwendbar.

<u>Beispiel:</u> Einfacher Balken mit im Grund- und Aufriss exzentrisch angeordnetem Spannglied

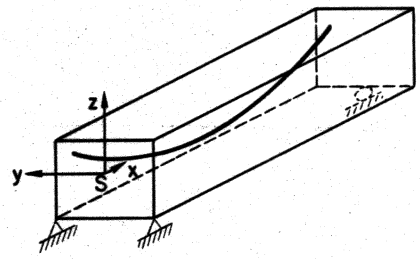


Bild 3: Einfacher Balken mit exzentrisch angeordnetem Spannglied

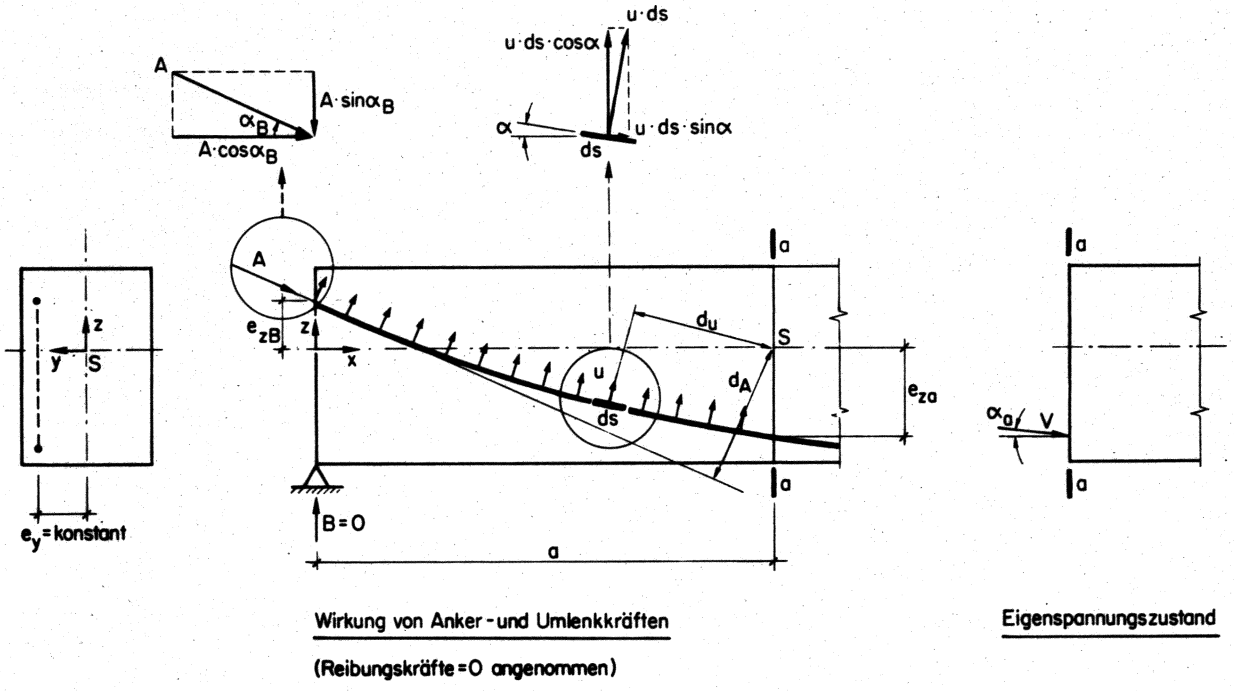


Bild 4: Beispiel zur statischen Deutung des Lastfalls Vorspannung

Zu den Auflagerkräften des Balkens ist folgendes zu bemerken: Durch Ankerkräfte, Umlenkkräfte und Reibungskräfte je allein entstehen wohl Auflagerkräfte, insgesamt heben sich diese bei statisch bestimmten Systemen jedoch wieder auf. Dies bestätigt sich durch die Deutung des Lastfalls Vorspannung als Eigenspannungszustand. Eigenspannungszustände bewirken bei statisch bestimmten Systemen keine Auflagerreaktionen.

Die Schnittkräfte aus Vorspannung im Schnitt a-a können wie folgt berechnet werden:

- Aufgrund 1. Deutung (Index E):
  Direkte Wirkung der Resultierenden der Beton-Eigenspannungen (= Vorspannkraft V) im betrachteten Schnitt.

- Aufgrund 2. Deutung (Index K):
  Reduktion der Wirkungen aller links vom betrachteten Schnitt angreifenden Kräfte A, u, (r).

Da die Reibungskräfte r = 0 angenommen wurden, gilt in jedem Schnitt V = A.

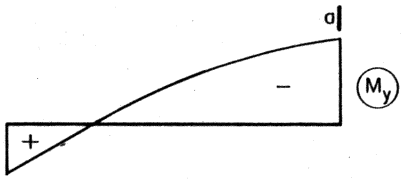
$$M_y: \quad M_y^K = \underbrace{-A\cdot d_A}_{\substack{\text{Wirkung}\\ \text{Ankerkraft}}} + \underbrace{\int_0^a u\cdot d_u\cdot ds}_{\substack{\text{Wirkung}\\ \text{Umlenkkräfte}}}$$

Wenn A und u in Komponenten zerlegt werden, erhält man für M_y^K:

$$M_y^K = -A\cdot\sin\alpha_B\cdot a + A\cdot\cos\alpha_B\cdot e_{zB} + \int_0^a u\cdot\cos\alpha\cdot(a-x)\cdot ds + \int_0^a u\cdot\sin\alpha\cdot z\cdot ds$$

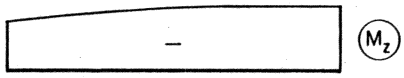
Für M_y^E ergibt sich:

$$M_y^E = -V\cdot\cos\alpha_a\cdot e_{za}$$



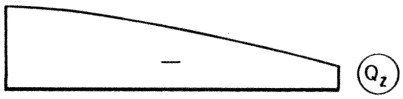
$$M_z: \quad M_z^K = -A\cdot\cos\alpha_B\cdot e_y - \int_0^a u\cdot\sin\alpha\cdot e_y\cdot ds$$

$$M_z^E = -V\cdot\cos\alpha_a\cdot e_y$$



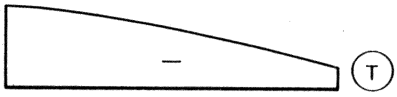
$$Q_z: \quad Q_z^K = -A\cdot\sin\alpha_B + \int_0^a u\cdot\cos\alpha\cdot ds$$

$$Q_z^E = -V\cdot\sin\alpha_a$$



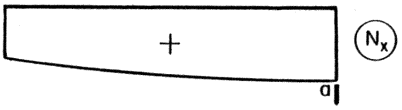
$$T: \quad T^K = -A\cdot\sin\alpha_B\cdot e_y + \int_0^a u\cdot\cos\alpha\cdot e_y\cdot ds$$

$$T^E = -V\cdot\sin\alpha_a\cdot e_y$$



$$N_x: \quad N_x^K = A\cdot\cos\alpha_B + \int_0^a u\cdot\sin\alpha\cdot ds$$

$$N_x^E = V\cdot\cos\alpha_a$$



Die Schnittkräfte aufgrund der beiden Deutungen müssen naturgemäss jeweils gleich gross sein. In einem konkreten Fall könnte der Beweis numerisch, oder - sofern der Spanngliedverlauf als analytische Funktion gegeben ist - auch analytisch erbracht werden. Somit gilt:

$$M_y^K = M_y^E, \quad M_z^K = M_z^E, \quad Q_z^K = Q_z^E, \quad T_z^K = T_z^E, \quad N_x^K = N_x^E$$

Statisch bestimmte Lagerung

Für statisch bestimmte Lagerung gilt der folgende

> 1. Satz
> Die Schnittkräfte aus den auf einen bestimmten Stabquerschnitt reduzierten Ankerkräften, Umlenkkräften und Reibungskräften sind gleich den in diesem Querschnitt im Beton vorhandenen Eigenspannungs-Schnittkräften.

Statisch unbestimmte Lagerung

Bei statisch unbestimmter Lagerung kommen die Schnittkräfte infolge der Auflagerkräfte bzw. der statisch überzähligen Grössen zu den Schnittkräften bei statisch bestimmter Lagerung hinzu.

Die obigen Feststellungen sind auch uneingeschränkt gültig für gekrümmte Träger und ganz allgemeinen Spanngliedverlauf (e_y und e_z längs Trägeraxe variabel).

1.1.2 Schnittkräfte bei allgemeinem Spanngliedverlauf

Gegeben sei ein statisch bestimmt gelagerter Träger mit einem Spannglied. Dieses soll längs der Stabaxe einen beliebigen, allgemeinen Verlauf $e(x,y,z)$ aufweisen, der durch die Projektionen $e_y(x)$ im Grundriss und $e_z(x)$ im Aufriss mit den entsprechenden Neigungswinkeln $\alpha_y(x)$ und $\alpha_z(x)$ definiert ist. Ferner sei die Grösse der Vorspannkraft $V(x)$ an jeder Stelle des Spanngliedes bekannt. Die Ueberlegungen gelten auch für Träger mit mehreren Spanngliedern bzw. für die Resultierende der Spanngliedkräfte.

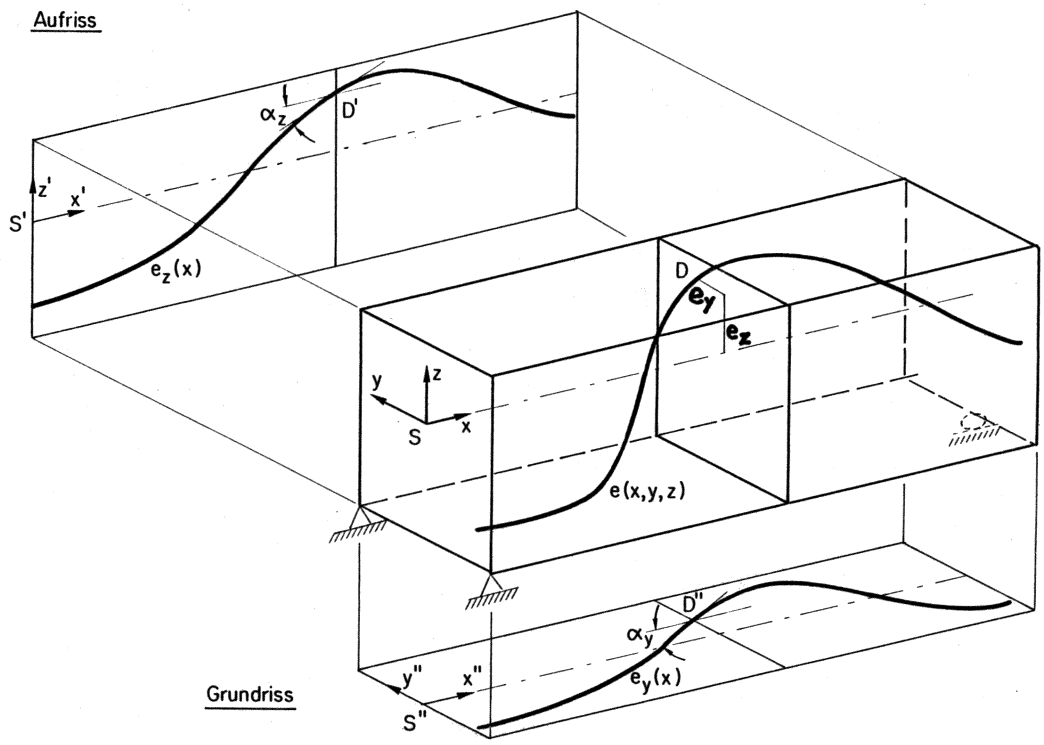
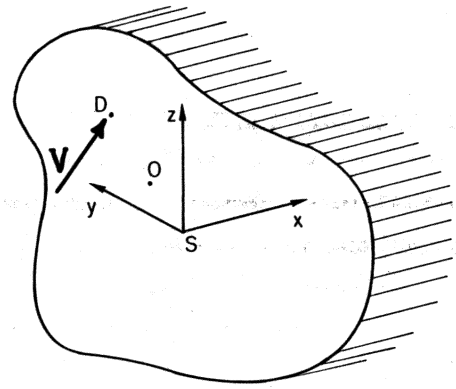


Bild 5: Träger mit allgemeinem Spanngliedverlauf

Gesucht werden die Schnittkräfte aus Vorspannung in einem bestimmten Querschnitt x. Dabei ist die Torsion von besonderem Interesse.



S: Schwerpunkt
O: Schubmittelpunkt
D: Durchstosspunkt des Spanngliedes durch die Querschnittsebene bzw. Angriffspunkt der Vorspannkraft
V: Spannkraftvektor, schief zur Querschnittsaxe

Bild 6 : Allgemeiner Querschnitt

Im allgemeinen muss zwischen Schwerpunkt S und Schubmittelpunkt O unterschieden werden. Der Schubmittelpunkt ist folgendermassen definiert:

1. Angriffspunkt der Belastung bei verdrehungsfreier Biegung, und
2. Drehpunkt des Querschnittes bei beliebiger Belastung (Belastung ausserhalb des Schubmittelpunktes).

Die Berechnung des Schubmittelpunktes kann nach folgendem Prinzip durchgeführt werden:

Für verdrehungsfreie Biegung müssen die über den Querschnitt aufsummierten Schubspannungen dieselbe Wirkungslinie ihrer Resultierenden haben wie die Querkraft aus äusserer Belastung.

Im Anhang ist ein konkretes Beispiel für die Berechnung des Schubmittelpunktes dargestellt.

<u>Allgemeine Lösung</u>

Das angewandte Vorgehen entspricht der statischen Deutung des Lastfalls Vorspannung als Eigenspannungszustand.

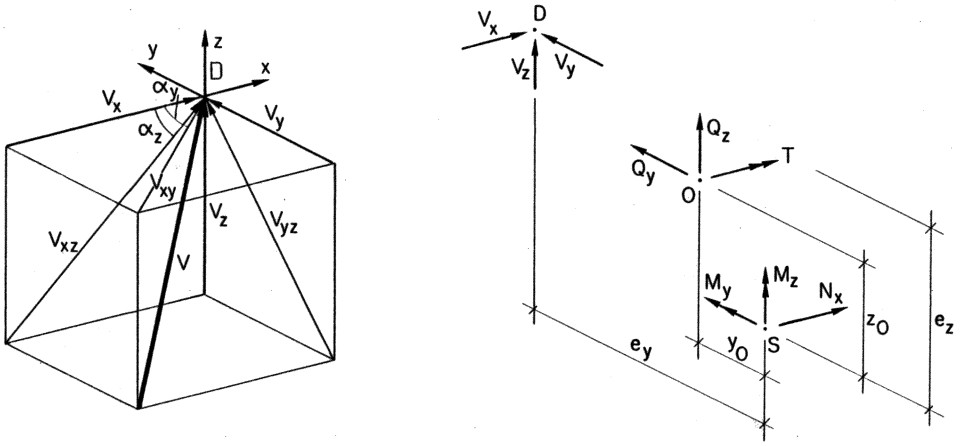


Bild 7: Zerlegung der Vorspannkraft V in Komponenten sowie Schnittkräfte in den Bezugspunkten S und O

Der im Punkt D des Querschnittes x angreifende Spannkraftvektor V kann in die Komponenten V_x, V_y, V_z zerlegt werden.

Berechnung als Funktion von V, α_y, α_z:

$$V_x = V \cdot \frac{\cos\alpha_y}{\sqrt{1+\cos^2\alpha_y \cdot \tan^2\alpha_z}} \quad ; \quad V_y = V \cdot \frac{\sin\alpha_y}{\sqrt{1+\cos^2\alpha_y \cdot \tan^2\alpha_z}} \quad ;$$

$$V_z = V \cdot \frac{\cos\alpha_y \cdot \tan\alpha_z}{\sqrt{1+\cos^2\alpha_y \cdot \tan^2\alpha_z}} \quad .$$

Berechnung als Funktion von V, e_y', e_z' mit $\tan\alpha_y = \frac{de_y}{dx} = e_y'$ und $\tan\alpha_z = \frac{de_z}{dx} = e_z'$:

$$V_x = V \cdot \frac{1}{\sqrt{1+e_y'^2+e_z'^2}} \quad ; \quad V_y = V \cdot \frac{e_y'}{\sqrt{1+e_y'^2+e_z'^2}} \quad ; \quad V_z = V \cdot \frac{e_z'}{\sqrt{1+e_y'^2+e_z'^2}} \quad .$$

Die Schnittkräfte M_y, M_z und N_x werden zweckmässigerweise im Schwerpunkt S und die Schnittkräfte Q_y, Q_z und T im Schubmittelpunkt O definiert. Sie ergeben sich zu

$M_y = V_x \cdot e_z$	$Q_y = V_y$
$M_z = -V_x \cdot e_y$	$Q_z = V_z$
$N_x = V_x$	$T = V_z \cdot (e_y - y_0) - V_y \cdot (e_z - z_0)$

Das Torsionsmoment infolge der Vorspannkraft V ist gleich dem Moment der in der Querschnittsebene liegenden Komponenten V_y und V_z bzw. ihrer Resultierenden V_{yz} um den Schubmittelpunkt.

Damit ergibt sich der für statisch bestimmte Lagerung gültige

> <u>2. Satz:</u>
> Ein Spannglied erzeugt in einem bestimmten Querschnitt ein Torsionsmoment, sofern der in die Querschnittsebene projizierte Spannkraftvektor ein Moment um den Schubmittelpunkt ausübt.

Näherungslösung

Bei geringen Neigungen des Spanngliedes gegenüber der Stabaxe erhält man mit den Näherungen $\sin\alpha = \tan\alpha = e'$ und $\cos\alpha \simeq 1$ für die Spannkraftkomponenten

$$V_x \simeq V\cdot\cos\alpha_y \simeq V$$
$$V_y \simeq V\cdot\sin\alpha_y \simeq V\cdot\tan\alpha_y = V\cdot e'_y$$
$$V_z \simeq V\cdot\cos\alpha_y\cdot\tan\alpha_z \simeq V\cdot\tan\alpha_z = V\cdot e'_z$$

Damit ergeben sich die Schnittkräfte näherungsweise zu

$M_y \simeq V\cdot e_z$	$Q_y \simeq V\cdot e'_y$
$M_z \simeq -V\cdot e_y$	$Q_z \simeq V\cdot e'_z$
$N_x \simeq V$	$T \simeq V\cdot e'_z\cdot(e_y-y_0) - V\cdot e'_y\cdot(e_z-z_0)$

Beispiel: Zweistegiger, einfach symmetrischer Brückenquerschnitt

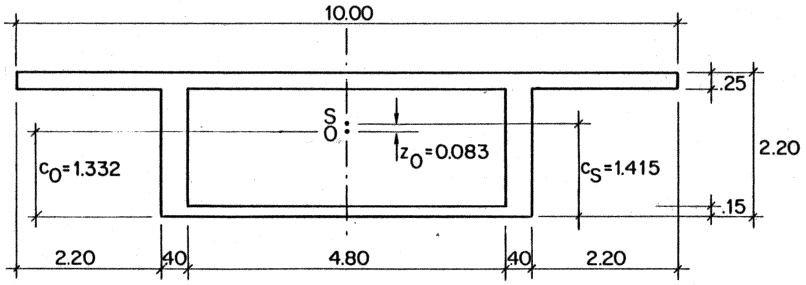


Bild 8: Beispiel für einen Brückenquerschnitt (schematisiert)

Schwerpunkt: $c_S = \dfrac{\int z\cdot dF}{\int dF} = 1.415$ m

Schubmittelpunkt (siehe Herleitung im Anhang): $c_0 = 1.332$ m

Vorspannkräfte und entsprechende Schnittkräfte:

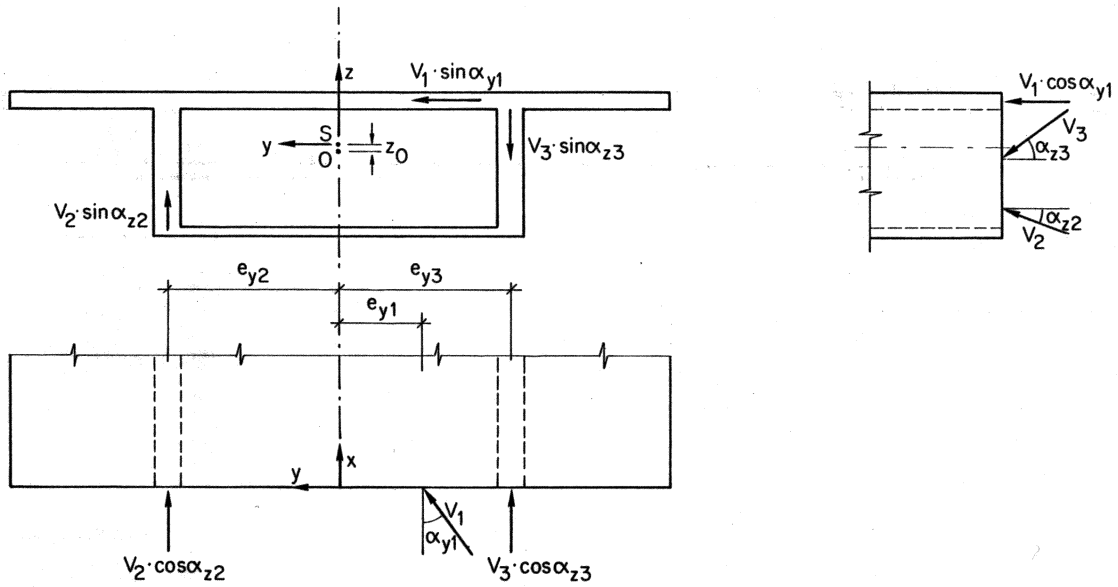


Bild 9: Vorspannkräfte bzw. entsprechende Komponenten am Querschnitt nach Bild 8

$$N_x = V_1 \cdot \cos\alpha_{y1} + V_2 \cdot \cos\alpha_{z2} + V_3 \cdot \cos\alpha_{z3} \simeq V_1 + V_2 + V_3$$

$$M_y = V_1 \cdot \cos\alpha_{y1} \cdot e_{z1} - V_2 \cdot \cos\alpha_{z2} \cdot e_{z2} - V_3 \cdot \cos\alpha_{z3} \cdot e_{z3} \simeq V_1 \cdot e_{z1} - V_2 \cdot e_{z2} - V_3 \cdot e_{z3}$$

$$M_z = V_1 \cdot \cos\alpha_{y1} \cdot e_{y1} - V_2 \cdot \cos\alpha_{z2} \cdot e_{y2} + V_3 \cdot \cos\alpha_{z3} \cdot e_{y3} \simeq V_1 \cdot e_{y1} - V_2 \cdot e_{y2} + V_3 \cdot e_{y3}$$

$$Q_y = V_1 \cdot \sin\alpha_{y1} \simeq V_1 \cdot e'_{y1}$$

$$Q_z = V_2 \cdot \sin\alpha_{z2} - V_3 \cdot \sin\alpha_{z3} \simeq V_2 \cdot e'_{z2} - V_3 \cdot e'_{z3}$$

$$M_x = T = -V_1 \cdot \sin\alpha_{y1} \cdot (e_{z1} + z_0) + V_2 \cdot \sin\alpha_{z2} \cdot e_{y2} + V_3 \cdot \sin\alpha_{z3} \cdot e_{y3}$$

$$\simeq -V_1 \cdot e'_{y1} \cdot (e_{z1} + z_0) + V_2 \cdot e'_{z2} \cdot e_{y2} + V_3 \cdot e'_{z3} \cdot e_{y3}$$

1.1.3 Einfluss einer Trägerkrümmung

Bei der Vorspannung statisch bestimmt gelagerter gekrümmter Träger stellt sich die folgende grundsätzliche Frage: Hat die Trägerkrümmung einen Einfluss auf die Schnittkräfte infolge Vorspannung?

Diese Frage soll anhand von zwei Beispielen untersucht werden.

1. Beispiel: Kreisförmig gekrümmter Kragträger mit exzentrischem Spannglied parallel zur Stabaxe

Vorspannung als Wirkung von Anker-, Umlenk- und Reibungskräften:

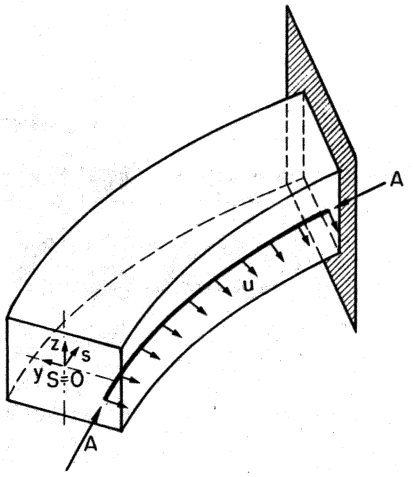
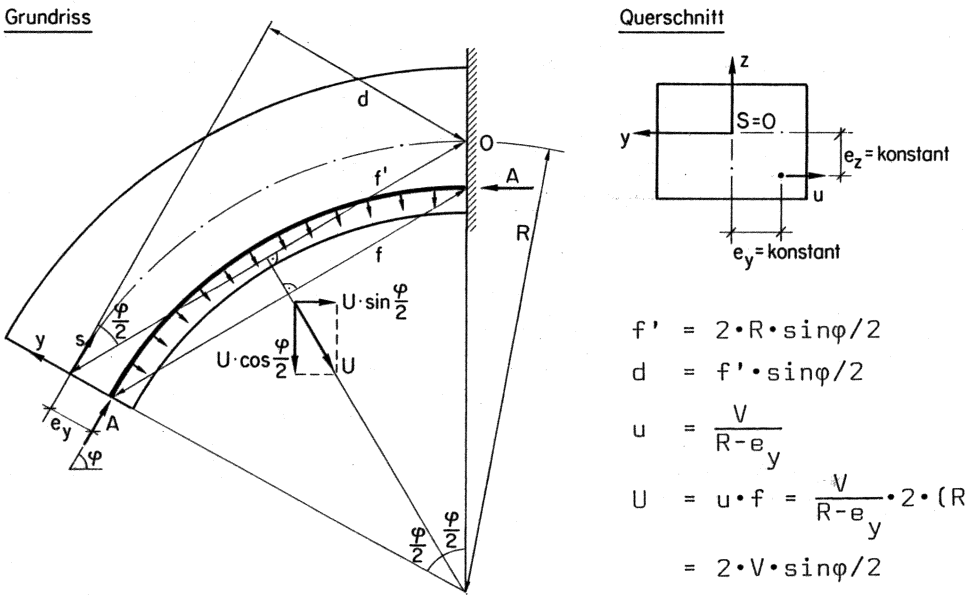


Bild 10: Kreisförmig gekrümmter Kragträger mit exzentrischem Spannglied parallel zur Stabaxe

Es sind nur die Ankerkräfte und Umlenkkräfte eingezeichnet. Die Reibungskräfte werden vernachlässigt.
(Vorspannkraft $V(s) = V(\varphi) = \text{konst.} = A$)



$$f' = 2 \cdot R \cdot \sin\varphi/2 \qquad f = 2 \cdot (R - e_y) \cdot \sin\varphi/2$$

$$d = f' \cdot \sin\varphi/2$$

$$u = \frac{V}{R - e_y}$$

$$U = u \cdot f = \frac{V}{R - e_y} \cdot 2 \cdot (R - e_y) \cdot \sin\varphi/2$$

$$= 2 \cdot V \cdot \sin\varphi/2$$

Bild 11: Kreisförmig gekrümmter Kragträger, Vorspannung als Wirkung von Anker- und Umlenkkräften (Reibungskräfte = 0 angenommen)

Berechnung der Momente durch Reduktion der Wirkungen der Ankerkräfte und Umlenkkräfte auf den Einspannquerschnitt:

M_z: $M_z(u) = U \cdot \frac{f'}{2} = 2 \cdot V \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot R \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot V \cdot R \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}$

$M_z(A) = -A \cdot (d - e_y) = -A \cdot (f' \cdot \sin\frac{\varphi}{2} - e_y) = -2 \cdot A \cdot R \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} + A \cdot e_y$

Mit A = V wird:

$M_z(u,A) = M_z(u) + M_z(A) = V \cdot e_y$

M_y: $M_y(u,A) = M_y(u) + M_y(A) = -U \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot e_z - A \cdot \cos\varphi \cdot e_z$

$$= -V \cdot e_z \cdot \underbrace{(2 \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi)}_{=1} = -V \cdot e_z$$

$$(\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}})$$

T: $T(u,A) = T(u) + T(A) = -U \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot e_z + A \cdot \sin\varphi \cdot e_z$

$$= V \cdot e_z \cdot \underbrace{(-2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \cos\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi)}_{=0} = 0$$ <u>Keine Torsion!</u>

Die Schnittkräfte infolge A und u am gekrümmten Träger sind gleich gross wie an einem analogen geraden Träger infolge A allein (keine horizontalen Umlenkkräfte). Trotz Balkenkrümmung entsteht keine Torsion.

2. Beispiel: Kreisförmig gekrümmter Kragträger mit einem Spannglied, das im Grundriss eine konstante und im Aufriss eine variable Exzentrizität aufweist.

Vorspannung als Eigenspannungszustand:

Bei der Deutung des Lastfalls Vorspannung als Eigenspannungszustand kann jeder Querschnitt für sich allein betrachtet werden.

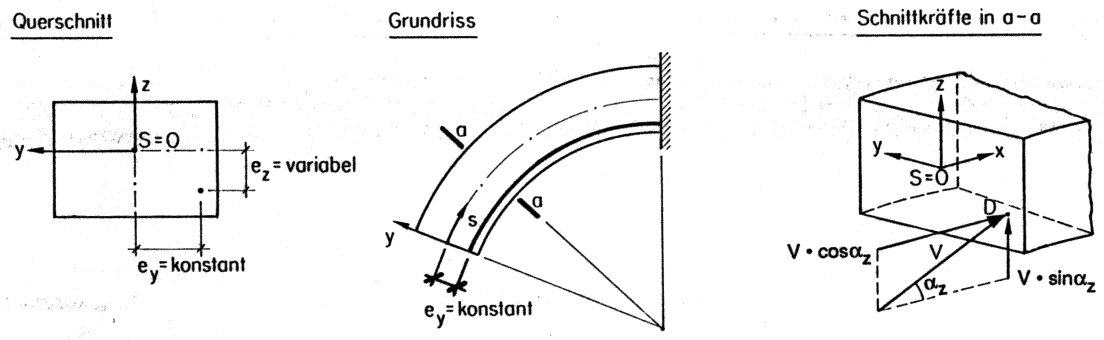


Bild 12: Kreisförmig gekrümmter Kragträger, Vorspannung als Eigenspannungszustand

$$M_y = -V \cdot \cos\alpha_z \cdot e_z \quad ; \qquad M_z = V \cdot \cos\alpha_z \cdot e_y$$

$$Q_z = V \cdot \sin\alpha_z \quad ; \qquad T = -V \cdot \sin\alpha_z \cdot e_y$$

Wie beim geraden Träger!

Folgerung

Die Trägerkrümmung hat keinen Einfluss auf die Schnittkräfte infolge Vorspannung!

> 3. Satz:
> An einem gekrümmten, statisch bestimmt gelagerten Träger sind die Schnittkräfte infolge Vorspannung die gleichen wie an einem analogen geraden Träger.

Man kann somit in Gedanken einen gekrümmten Träger strecken, ihn vorspannen und nachher wieder krümmen: Durch das Krümmen entstehen keine zusätzlichen Schnittkräfte.

Vergleich mit äusserer Belastung

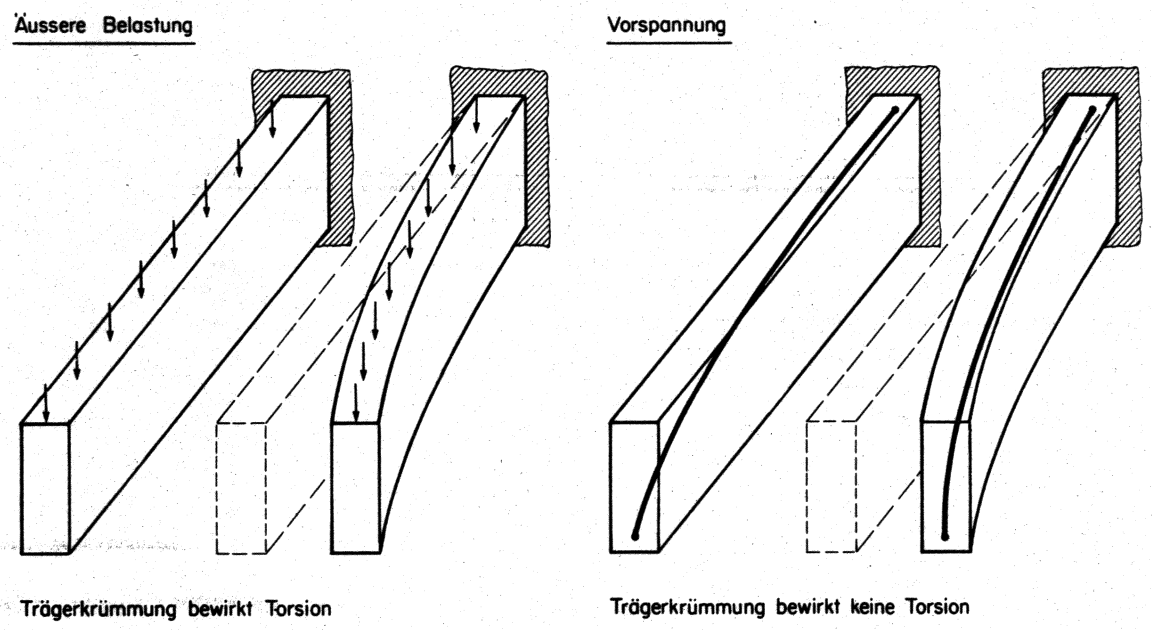


Bild 13: Torsion infolge äusserer Belastung und infolge Vorspannung am gekrümmten Stab

Die Methode der direkten Kompensation der äusseren Belastung mittels Umlenkkräften, die bei geraden Trägern in bestimmten Fällen zweckmässig sein kann, führt somit bei gekrümmten Trägern nicht zu einer Kompensation der Torsionsmomente aus der äusseren Belastung.

Bemerkung:

Der obige Satz gilt streng genommen nur unter Vernachlässigung der Tatsache, dass bei einem gekrümmten Träger die konkave Seite kürzer ist als die konvexe Seite. Zum Beispiel ist ein in z parabelförmig und mit e_y = konst. $\neq$ 0 geführtes Spannglied kürzer bzw. länger als für e_y = konst. = 0, was zu unterschiedlichen Spanngliedneigungen führt. Ein solches Spannglied bewirkt daher etwas andere Schnittkräfte Q_z und T als bei einem in der Stabaxe gemessenen, gleich langen analogen geraden Träger (Faktor $R/[R \pm e_y]$). Dieser Effekt kann jedoch in praktischen Fällen zumindest für den Entwurf der Spanngliedführung meist vernachlässigt werden, mit Ausnahme von stark gekrümmten Trägern. Der Effekt verschwindet weitgehend immer dann, wenn zwei analoge Spannglieder symmetrisch zur Vertikalebene durch die Stabaxe angeordnet werden (Kompensation), was in der Praxis häufig der Fall ist.

1.1.4 Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion

Definitionen

Gleichgewichtstorsion

Gleichgewichtstorsion liegt vor, sofern für die Lastabtragung die Torsionssteifigkeit erforderlich ist. Gleichgewichtstorsion resultiert aus der Erfüllung von Gleichgewichtsbedingungen.

Verträglichkeitstorsion

Verträglichkeitstorsion liegt vor, sofern für die Lastabtragung die Torsionssteifigkeit nicht unbedingt erforderlich ist. Verträglichkeitstorsion resultiert aus der Erfüllung von Verträglichkeitsbedingungen.

Vorkommen

Gleichgewichtstorsion kommt in statisch bestimmten und in statisch unbestimmten Systemen vor. Torsion in statisch bestimmten Systemen ist immer Gleichgewichtstorsion.

Verträglichkeitstorsion kommt nur in statisch unbestimmten Systemen vor. Torsion in statisch unbestimmten Systemen kann entweder Verträglichkeitstorsion oder die Summe von Verträglichkeits- und Gleichgewichtstorsion sein.

Gleichgewichtstorsion tritt z.B. auf bei exzentrisch belasteten und bei gekrümmten Trägern. Verträglichkeitstorsion tritt z.B. auf bei schief gelagerten Trägern.

Bedeutung der Torsionssteifigkeit

Bei Systemen mit Gleichgewichtstorsion führt der Wegfall der Torsionssteifigkeit zum Verlust der Tragfähigkeit. Für Tragwerke mit Gleichgewichtstorsion ist die Torsionssteifigkeit somit absolut notwendig.

Bei Systemen mit reiner Verträglichkeitstorsion führt der Wegfall der Torsionssteifigkeit nicht zu einem Verlust der Tragfähigkeit, sofern eine Umlagerung der inneren Kräfte möglich ist (z.B. Anwachsen der Biegemomente im Feld bei einem schief gelagerten Träger).

Beispiele für Gleichgewichtstorsion

1.

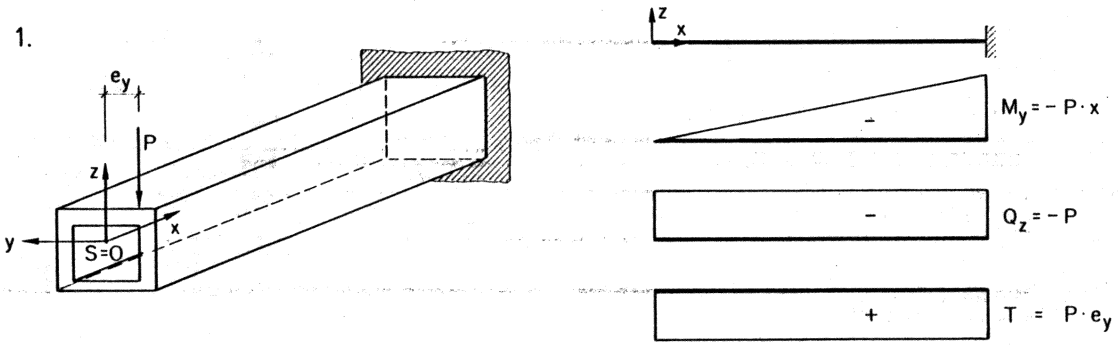


Bild 14 : Kragträger mit exzentrischer Einzellast

2.

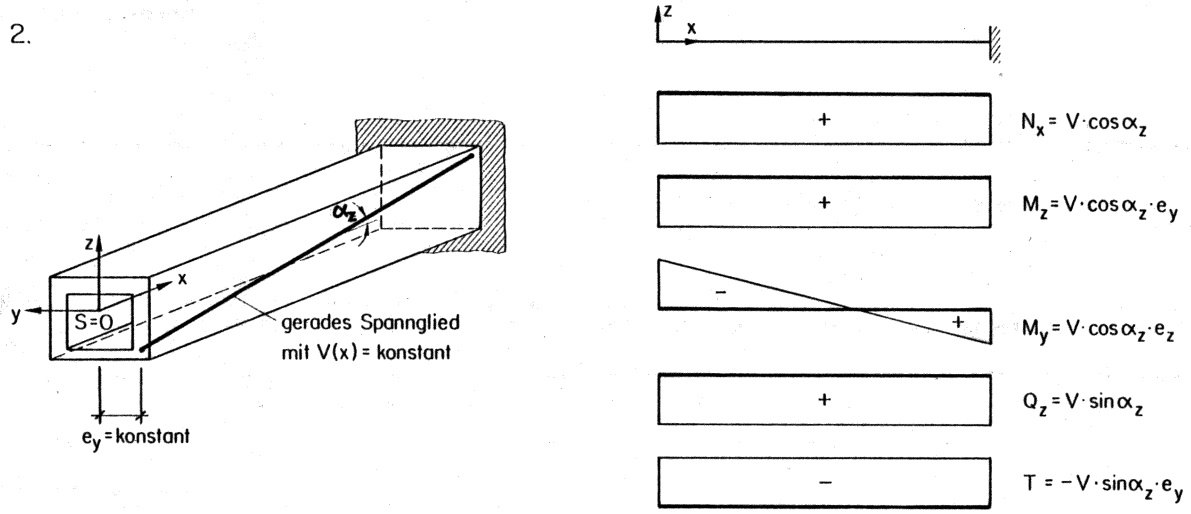


Bild 15 : Kragträger mit exzentrisch angeordnetem Spannglied

Beispiele für Verträglichkeitstorsion

1.

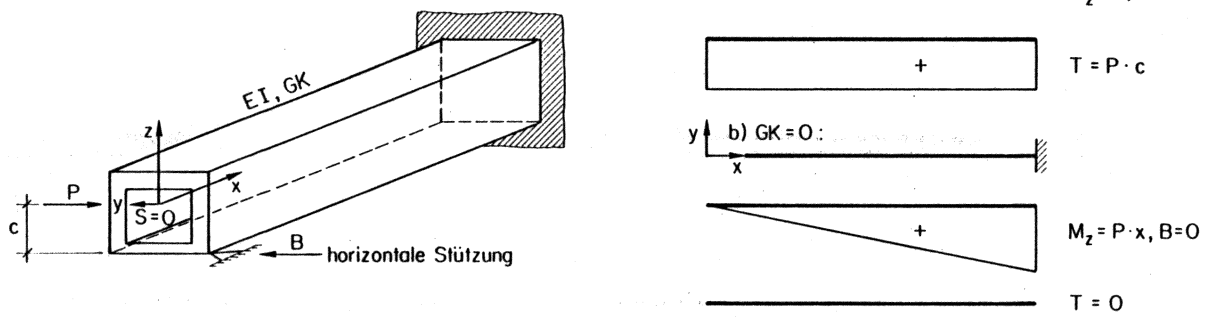


Bild 16 : Horizontal exzentrisch gestützter Kragträger mit horizontaler Einzellast

2.

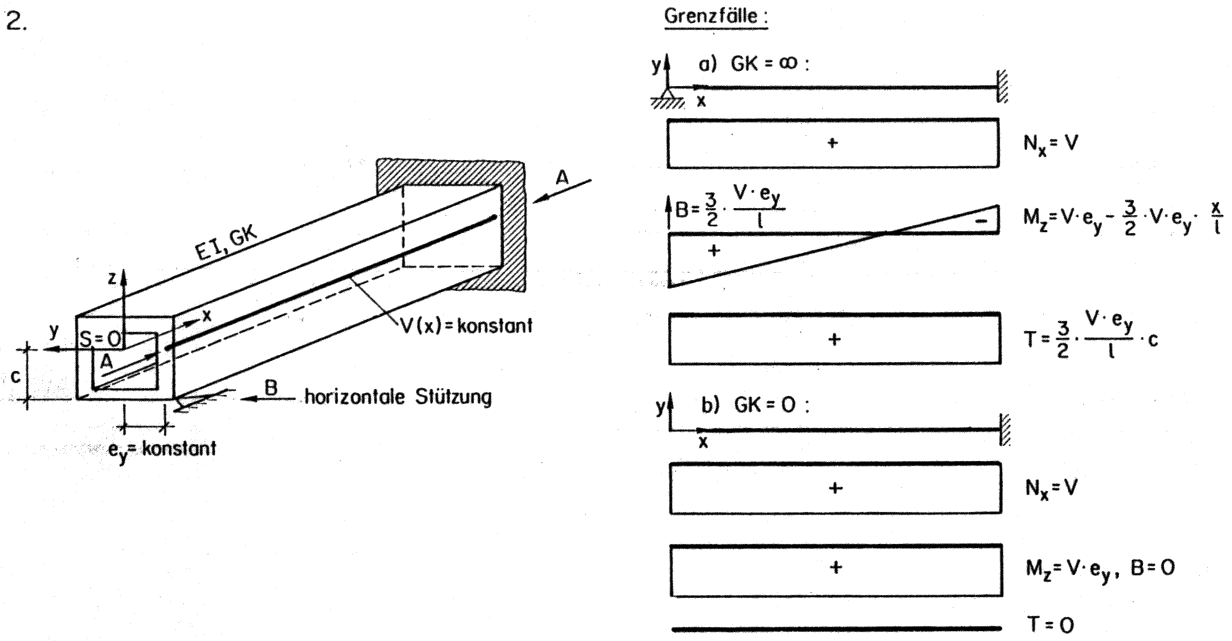


Bild 17 : Horizontal exzentrisch gestützter Kragträger mit exzentrisch angeordnetem Spannglied

Beispiel mit beiden Torsionsarten

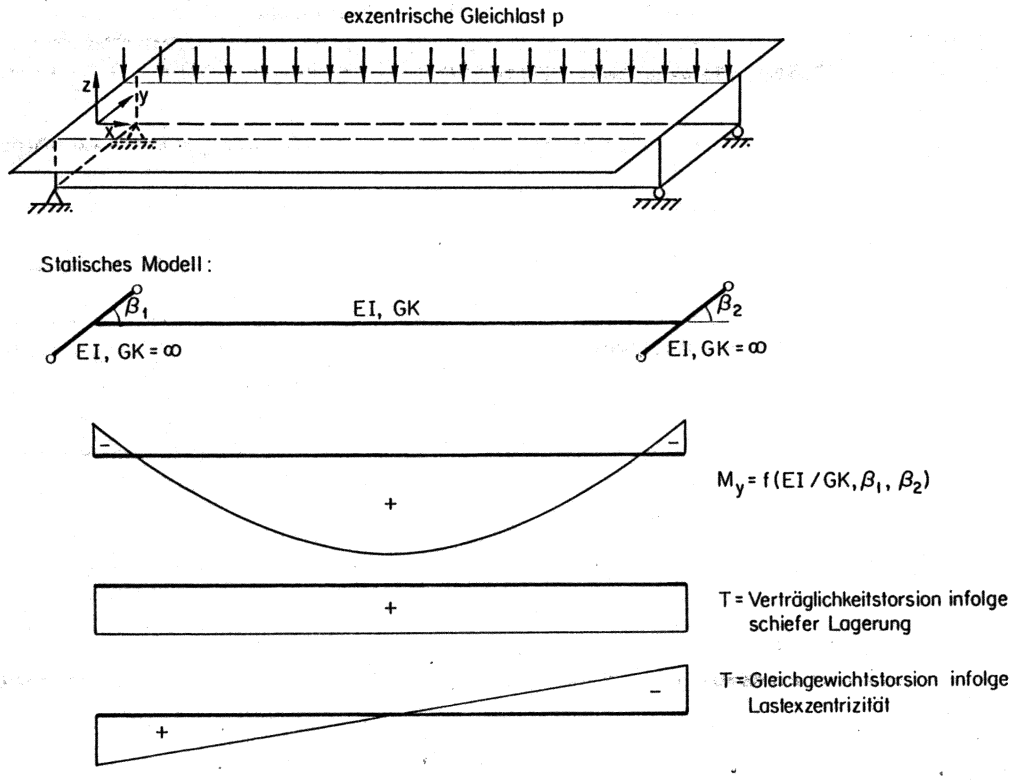


Bild 18 : Schief gelagerter Einfeldträger mit exzentrischer Gleichlast

Anmerkungen

1. Bei statisch unbestimmten Systemen kann die Aufgliederung in Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion von der Wahl des statisch bestimmten Grundsystems abhängen, wie das folgende Beispiel zeigt:

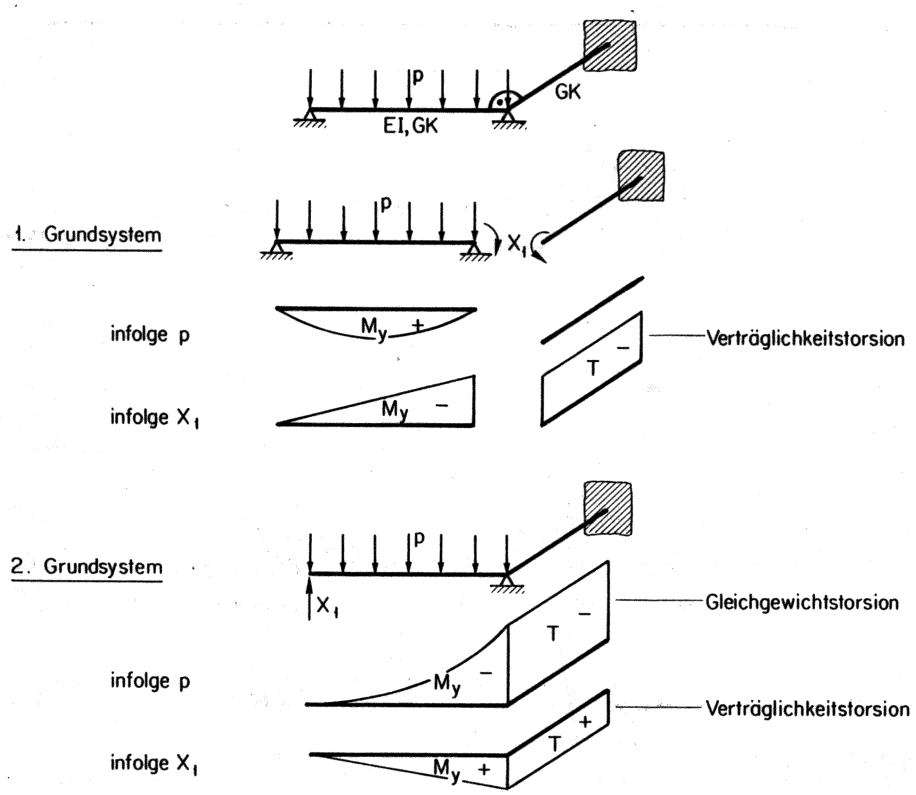


Bild 19: Einfluss des Grundsystems auf die Aufgliederung in Gleichgewichts- und Verträglichkeitstorsion

2. Der Begriff Verträglichkeitstorsion kann zum Begriff Verträglichkeits-Schnittkräfte erweitert werden. Demnach können in statisch unbestimmten Systemen durch die Erfüllung von Verträglichkeitsbedingungen, d.h. durch die überzähligen Grössen

- Verträglichkeits-Biegemomente
- Verträglichkeits-Querkräfte
- Verträglichkeits-Torsionsmomente
- Verträglichkeits-Normalkräfte

entstehen. Die Aufgliederung der gesamten Schnittkräfte in Gleichgewichts- und Verträglichkeits-Schnittkräfte kann von der Wahl des statisch bestimmten Grundsystems abhängen (siehe 1. Anmerkung).

1.2 Formtreue Vorspannung

Die folgenden Abschnitte betreffen die formtreue Vorspannung statisch bestimmter Systeme. Statisch unbestimmte Systeme werden am Schluss des Kapitels behandelt.

1.2.1 Definition und Grundgleichungen

Durch die formtreue Vorspannung eines Tragwerks werden die Biegemomente, Querkräfte und Torsionsmomente aus einer bestimmten äusseren Belastung gerade kompensiert. Das Ergebnis ist ein bezüglich dieser Schnittkräfte unverformtes, d.h. formtreues, Tragwerk. Es verbleiben allein die Normalkräfte aus äusserer Belastung und aus Vorspannung mit den entsprechenden Längenänderungen.

Grundgleichungen

Für formtreue Vorspannung müssen in jedem Querschnitt eines Tragwerks die folgenden Grundgleichungen erfüllt sein:

$$M_y(p) + M_y(V) = 0 \tag{1}$$

$$M_z(p) + M_z(V) = 0 \tag{2}$$

$$Q_y(p) + Q_y(V) = 0 \tag{3}$$

$$Q_z(p) + Q_z(V) = 0 \tag{4}$$

$$T(p) + T(V) = 0 \tag{5}$$

Als Restschnittkraft verbleibt:

$$N(p) + N(V) \neq 0$$

In diesen Gleichungen bezeichnen p einen bestimmten "Lastfall äussere Belastung", z.B. Einzellast, Gleichlast, usw., und V den "Lastfall Vorspannung".

Als Beispiel wird ein symmetrischer Kastenquerschnitt betrachtet mit n Spanngliedern in den Stegen (Index i) und m Spanngliedern in den Flanschen (Index k):

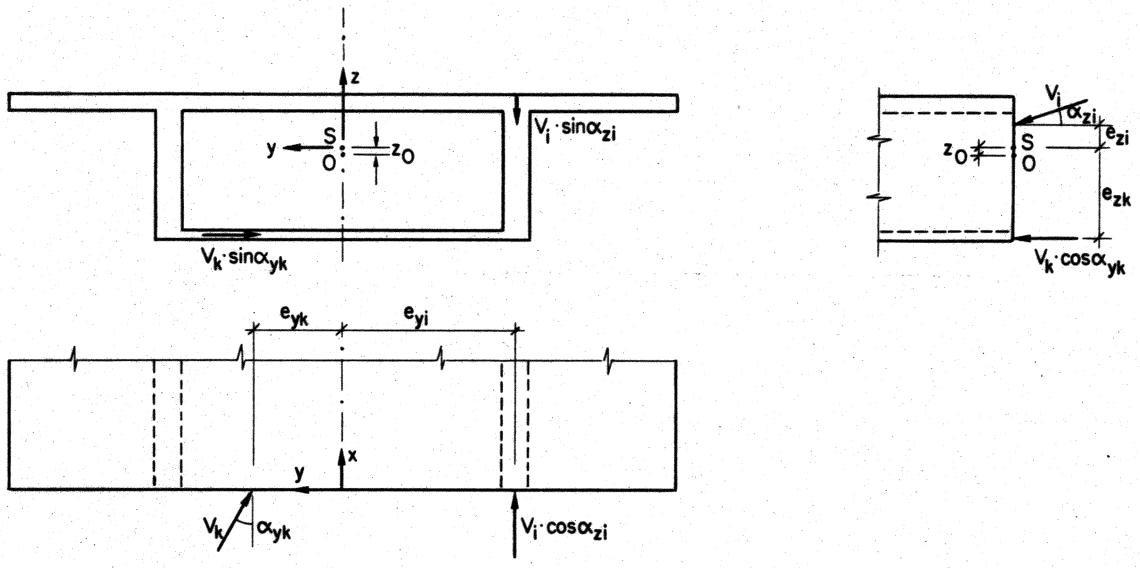


Bild 20: Symmetrischer Kastenquerschnitt mit Spanngliedern in Stegen und Flanschen

Die Grundgleichungen können wie folgt angeschrieben werden:

		Stege:		Flansche:		
$M_y(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot \cos\alpha_{zi} \cdot e_{zi}$	+	$\sum_1^m V_k \cdot \cos\alpha_{yk} \cdot e_{zk}$	$= 0$	(1)
$M_z(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot \cos\alpha_{zi} \cdot e_{yi}$	+	$\sum_1^m V_k \cdot \cos\alpha_{yk} \cdot e_{yk}$	$= 0$	(2)
$Q_y(p)$			+	$\sum_1^m V_k \cdot \sin\alpha_{yk}$	$= 0$	(3)
$Q_z(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot \sin\alpha_{zi}$			$= 0$	(4)
$T(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot \sin\alpha_{zi} \cdot e_{yi}$	+	$\sum_1^m V_k \cdot \sin\alpha_{yk} \cdot (e_{zk} - z_0)$	$= 0$	(5)

Oder mit den Näherungen $\sin\alpha \approx \tan\alpha = e'$ und $\cos\alpha \approx 1$ wird:

$M_y(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot e_{zi}$	+	$\sum_1^m V_k \cdot e_{zk}$	$= 0$	(1a)
$M_z(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot e_{yi}$	+	$\sum_1^m V_k \cdot e_{yk}$	$= 0$	(2a)
$Q_y(p)$			+	$\sum_1^m V_k \cdot e'_{yk}$	$= 0$	(3a)
$Q_z(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot e'_{zi}$			$= 0$	(4a)
$T(p)$	+	$\sum_1^n V_i \cdot e'_{zi} \cdot e_{yi}$	+	$\sum_1^m V_k \cdot e'_{yk} \cdot (e_{zk} - z_0)$	$= 0$	(5a)

1.2.2 Statisch bestimmte Systeme

Vorgehensregeln

Beim Entwerfen der Spannglieder für die formtreue Vorspannung statisch bestimmter Systeme kann nach den folgenden Regeln vorgegangen werden:

1. Regel

1. Schnittkräfte M(p), Q(p) und T(p) aus äusserer Belastung bestimmen.
2. Durch "Biege-Spannglieder" M(p) kompensieren.
3. Durch "Torsions-Spannglieder" T(p) kompensieren.
4. "Biege-Spannglieder" und "Torsions-Spannglieder" eventuell vereinigen.

Die 1. Regel entspricht einem naheliegenden Vorgehen, wie man es ohne weitergehende Kenntnisse etwa wählen würde. Sie führt jedoch oft nicht zum minimalen Spanngliedaufwand.

2. Regel

1. Schnittkräfte M(p), Q(p) und T(p) aus äusserer Belastung bestimmen.
2. Durch "Biege-Spannglieder" M(p) kompensieren.
3. Biege-Spannglieder derart verschieben, dass T(p) so weit wie möglich kompensiert wird.
4. Sofern noch erforderlich: Durch "Torsions-Spannglieder" die restliche Torsion $T_R(p)$ kompensieren.

Die 2. Regel ist universell anwendbar und führt stets zum minimalen Spanngliedaufwand.

3. Regel

1. Mit 1. Spanngliedgruppe äussere Belastung kompensieren.
2. Mit 2. Spanngliedgruppe unerwünschte Schnittkräfte der 1. Spanngliedgruppe kompensieren.

Die 3. Regel ist nur in speziellen Fällen anwendbar. Sie bietet dann jedoch eine rasche und elegante Lösung.

Näherungen

Beim Entwerfen der Spannglieder kann ausser von $\sin\alpha \approx \tan\alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$ auch von den folgenden Näherungen Gebrauch gemacht werden:

- Vernachlässigung der Reibungskräfte, d.h. V(x) wird als konstant angenommen.
- Umlenkkräfte bei parabelförmigem Spannglied $u(x) \approx \text{konst.} \approx \frac{8 \cdot V \cdot f}{l^2}$
  (l = Spannweite = Sehnenlänge zwischen den Endpunkten der Parabel,
  f = entsprechende Pfeilhöhe)

Beispiele

Für die folgenden Beispiele wird angenommen, dass der Schubmittelpunkt O und der Schwerpunkt S zusammenfallen. Eine Formulierung unter Verzicht auf diese Annahme würde jedoch keine grundsätzlichen Schwierigkeiten bieten. Ferner werden jeweils nur die Mittelebenen der Stege und Flanschen dargestellt, in denen auch die Spannglieder verlaufen sollen.

1. Beispiel: Kragträger mit reiner Torsion

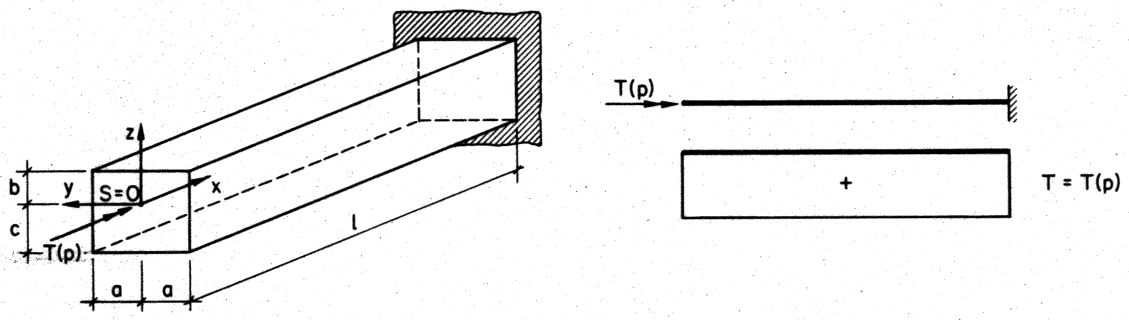


Bild 21: Kragträger mit reiner Torsion

Es sind nur Torsions-Spannglieder erforderlich.

Lösung mit Spanngliedern in den Stegen

Die Exzentrizitäten der Torsions-Spannglieder müssen so gewählt werden, dass keine unerwünschten Biegemomente M_y und M_z bzw. Querkräfte Q_y und Q_z entstehen. Deshalb kann die geometrisch mögliche Exzentrizität c am Kragarmende nicht voll ausgenützt werden.

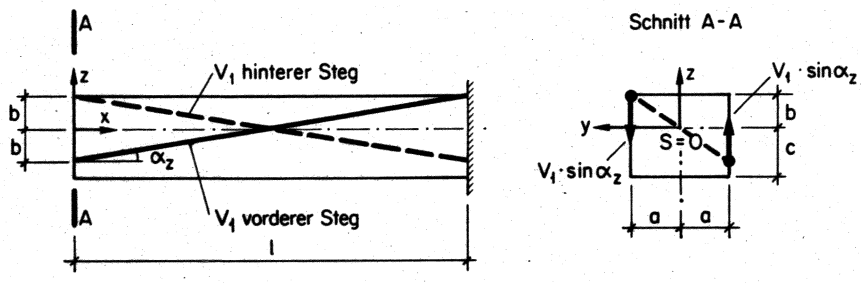


Bild 22: Kragträger, Vorspannung für reine Torsion (Spannglieder in den Stegen)

$T(p) + T(V) = 0$: $\quad T(p) - 2 \cdot V_1 \cdot \sin\alpha_z \cdot a = 0 \rightarrow \quad V_1 = \dfrac{T(p)}{2 \cdot \sin\alpha_z \cdot a}$

Kontrollen: $\quad M_y = M_z = Q_y = Q_z = 0$: $\quad N_x = 2 \cdot V_1 \cdot \cos\alpha_z$

Lösung mit Spanngliedern in den Flanschen

Die Exzentrizitäten und Spannkräfte der Torsions-Spannglieder müssen so gewählt werden, dass keine unerwünschten Biegemomente M_y und M_z bzw. Querkräfte Q_y und Q_z entstehen. Deshalb kann die geometrisch mögliche Exzentrizität a nur im unteren Flansch voll ausgenützt werden.

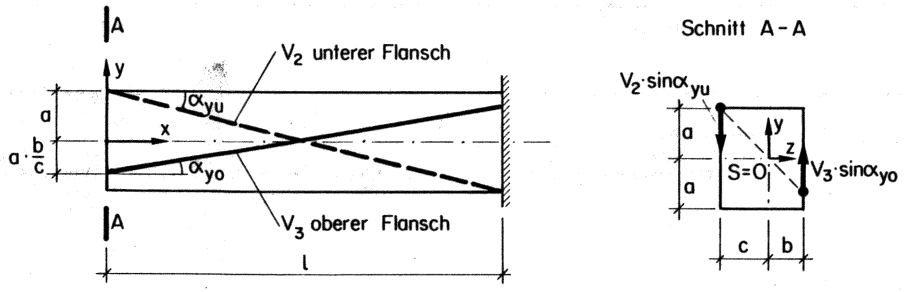


Bild 23: Kragträger, Vorspannung für reine Torsion (Spannglieder in den Flanschen)

$T(p) + T(V) = 0$: $\quad T(p) - V_2 \cdot \sin\alpha_{yu} \cdot c - V_3 \cdot \sin\alpha_{yo} \cdot b = 0$

$M_y(p) + M_y(V) = 0$: $\quad - V_2 \cdot \cos\alpha_{yu} \cdot c + V_3 \cdot \cos\alpha_{yo} \cdot b = 0$

Daraus wird mit $\cos\alpha_{yu} \simeq \cos\alpha_{yo}$:

$$V_3 = V_2 \cdot \frac{c}{b}$$

Eingesetzt: $\quad T(p) - V_2 \cdot \sin\alpha_{yu} \cdot c - V_2 \cdot \frac{c}{b} \cdot \sin\alpha_{yo} \cdot b = 0$

Mit $\sin\alpha_{yu} \simeq \sin\alpha_{yo} \cdot \frac{c}{b}$ wird:

$$V_2 = \frac{T(p)}{\sin\alpha_{yu} \cdot (b+c)} \quad ; \quad V_3 = \frac{T(p)}{\sin\alpha_{yo} \cdot (b+c)}$$

Kontrollen im Querschnitt am Kragarmende (x = 0):

$$M_y = -V_3 \cdot b + V_2 \cdot c = 0 \; ; \quad M_z = V_3 \cdot \frac{a \cdot b}{c} - V_2 \cdot a = 0 \; ;$$

$$Q_y = V_3 \cdot \sin\alpha_{yo} - V_2 \cdot \sin\alpha_{yu} = V_2 \cdot \sin\alpha_{yu} \cdot \left(\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} - 1\right) = 0 \; ;$$

$$Q_z = 0$$

Das dem Schwerpunkt nähere Spannglied V_3 muss - damit keine Biegemomente M_y und M_z entstehen - die grössere Vorspannkraft als das entferntere Spannglied V_2 aufweisen. Entsprechend muss die Exzentrizität e_y von V_3 kleiner sein als die Exzentrizität e_y von V_2.

Vergleich des Spanngliedaufwandes

Mit $\sin\alpha_z \approx \frac{2\cdot b}{l}$ und $\sin\alpha_{yu} \approx \frac{2\cdot a}{l}$ wird die gesamte Vorspannkraft der Spannglieder in den Stegen

$$2\cdot V_1 = \frac{2\cdot T(p)}{2\cdot \sin\alpha_z \cdot a} = \frac{T(p)\cdot l}{2\cdot b\cdot a}$$

und der Spannglieder in den Flanschen

$$V_2 + V_3 = \frac{T(p)}{\sin\alpha_{yu}\cdot(b+c)}\cdot\left(1+\frac{c}{b}\right) = \frac{T(p)\cdot l}{2\cdot a\cdot b}$$

Bei Vernachlässigung des geringen Längenunterschiedes zwischen den verschiedenen Spanngliedern ergibt sich der gleiche Spanngliedaufwand.

2. Beispiel: Kragträger mit exzentrischer Einzellast

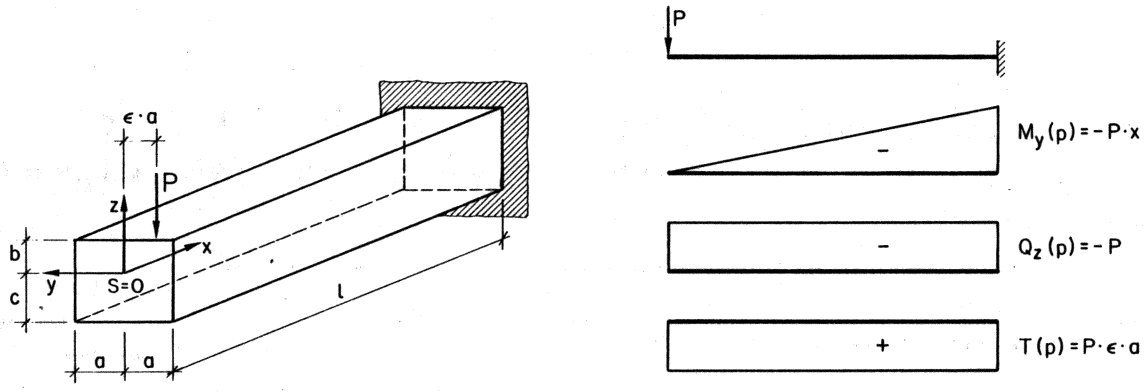


Bild 24: Kragträger mit exzentrischer Einzellast

a) Lösung nach 1. Regel

Bestimmen der Biege-Spanngliedер

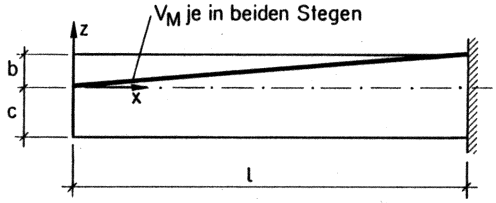


Bild 25: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Vorspannung für Biegung

$M_y(p) + M_y(V_M) = 0$: $\quad -P\cdot x + 2\cdot V_M\cdot e_z(x) = 0 \quad ; \quad e_z(x) = \frac{P\cdot x}{2\cdot V_M}$

Mit $e_z(l) = b$ wird $\quad V_M = \frac{P\cdot l}{2\cdot b}$

und somit $\quad e_z(x) = \frac{P\cdot x\cdot 2\cdot b}{2\cdot P\cdot l} = b\cdot\frac{x}{l}$

Die Querkraft Q_z ergibt sich zu

$$Q_z(p) + Q_z(V_M) = -P + 2\cdot V_M\cdot\frac{b}{l} = -P + 2\cdot\frac{P\cdot l}{2\cdot b}\cdot\frac{b}{l} = -P + P = 0 \ .$$

Durch die formtreue Vorspannung für Biegung werden somit auch die zugehörigen Querkräfte kompensiert.

Bestimmen der Torsions-Spannglieder (in den Stegen)

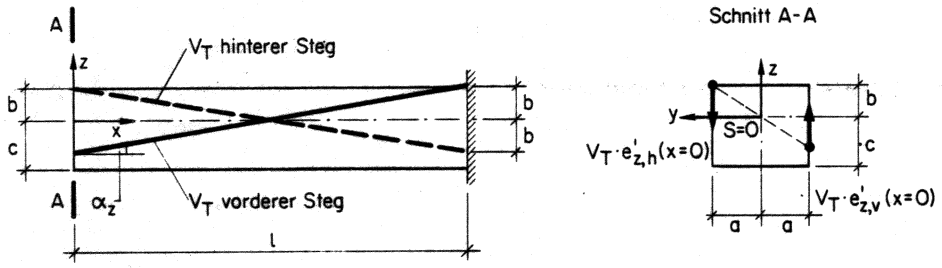


Bild 26: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Vorspannung für Torsion

$$T(p) + T(V_T) = 0: \qquad P\cdot\varepsilon\cdot a - 2\cdot V_T\cdot\sin\alpha_z\cdot a = 0$$

Wie beim 1. Beispiel ist das Torsionsmoment konstant und somit verlaufen die Torsions-Spannglieder linear. Anstatt jedoch $\sin\alpha_z \approx \frac{2\cdot b}{l}$ direkt einzusetzen, können auch $e_z(x)$ sowie V_T durch Integration ermittelt werden:

$$P\cdot\varepsilon\cdot a - 2\cdot V_T\cdot e'_z(x)\cdot a = 0; \qquad e'_z(x) = \frac{P\cdot\varepsilon}{2\cdot V_T} \ ;$$

$$e_z(x) = \int e'_z(x)\cdot dx = \frac{P\cdot\varepsilon}{2\cdot V_T}\cdot x + k \ .$$

Unter Ausnützung der maximal möglichen Exzentrizitäten ergibt sich für das vordere Spannglied mit der Randbedingung $e_z(0) = -b$

$$e_{z,v}(x) = \frac{P\cdot\varepsilon}{2\cdot V_T}\cdot x - b \ ,$$

und für das hintere Spannglied mit der Randbedingung $e_z(0) = +b$

$$e_{z,h}(x) = -\frac{P\cdot\varepsilon}{2\cdot V_T}\cdot x + b \ .$$

Mit der Randbedingung $e_z(l) = b$ (vorderes Spannglied) wird

$$V_T = \frac{P\cdot\varepsilon\cdot l}{4\cdot b}$$

und somit

$$e_{z,v,h}(x) = \mp\frac{b}{l}\cdot(l-2\cdot x) \ .$$

Grössere Exzentrizitäten sind nicht möglich, da sonst Biegemomente $M_y(V)$ entstehen würden.

Eine Querkraft Q_z wird durch die Torsions-Spannglieder nicht erzeugt, da sich deren vertikale Komponenten in den beiden Stegen kompensieren.

Vereinigen der Biege- und Torsions-Spannglieder

Die Vereinigung kann mit Hilfe einer Momentenbedingung der Vorspannkräfte der zu vereinigenden Spannglieder, am einfachsten unter Vernachlässigung von cosα, durchgeführt werden. Das Ergebnis wird hier für ε = 1 dargestellt.

$$\varepsilon = 1: \quad V_T = \frac{V_M}{2} \quad ; \quad V_M + V_T = V = \frac{3 \cdot P \cdot l}{4 \cdot b} \quad \text{(pro Steg)}$$

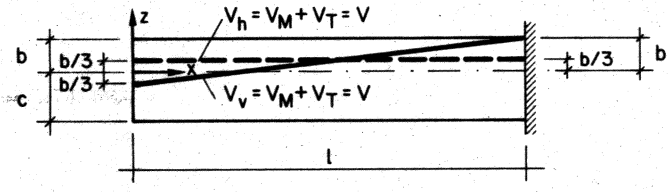


Bild 27: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Vorspannung für Biegung und Torsion

Kontrollen im Einspannquerschnitt (x = l):

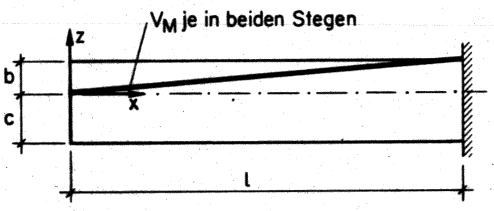
$$M_y(p) + M_y(V) = -P \cdot l + V_v \cdot b + V_h \cdot \frac{b}{3} = -P \cdot l + \frac{4}{3} \cdot V \cdot b = -P \cdot l + \frac{4}{3} \cdot \frac{3 \cdot P \cdot l}{4 \cdot b} \cdot b = -P \cdot l + P \cdot l = 0$$

$$Q_z(p) + Q_z(V) = -P + V_v \cdot \frac{4 \cdot b}{3 \cdot l} = -P + \frac{3 \cdot P \cdot l}{4 \cdot b} \cdot \frac{4 \cdot b}{3 \cdot l} = -P + P = 0$$

$$T(p) + T(V) = P \cdot a - V_v \cdot \frac{4\ b}{3 \cdot l} \cdot a = P \cdot a - \frac{3 \cdot P \cdot l}{4 \cdot b} \cdot \frac{4 \cdot b}{3 \cdot l} \cdot a = P \cdot a - P \cdot a = 0$$

b) Lösung nach 2. Regel für $\varepsilon \leqslant 1$

Bestimmen der Biege-Spannglieder



$$V_M = \frac{P \cdot l}{2 \cdot b} \quad \text{(gleich wie nach 1. Regel)}$$

$$e_z(x) = b \cdot \frac{x}{l}$$

Bild 28: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Vorspannung für Biegung

Verschieben der Biege-Spannglieder

Zwecks Kompensation der Torsionsmomente aus äusserer Belastung werden die beiden Biege-Spannglieder in entgegengesetzter Richtung um den gleichen Absolutbetrag verschoben. Dabei erhält das Spannglied im lastnahen Steg eine

grössere Neigung als das Spannglied im lastfernen Steg. Die Biegemomente aus Vorspannung werden dadurch nicht verändert.

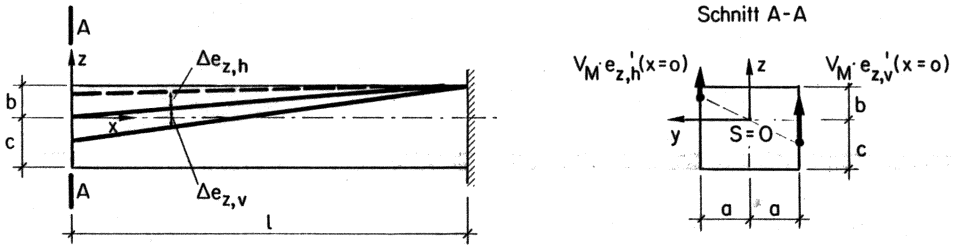


Bild 29: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Vorspannung für Torsion durch Verschieben der Biege-Spannglieder

Die Torsion infolge Vorspannung ist die Folge der unterschiedlichen Neigung der beiden Biege-Spannglieder nach dem Verschieben. In der Torsionsgleichung (5a) tritt daher an die Stelle der Ableitung der Exzentrizitätsfunktion $e'_z(x)$ die Ableitung der Verschiebungsfunktion $\Delta e'_z(x)$:

$$T(p) + T(V) = 0: \qquad P \cdot \varepsilon \cdot a - 2 \cdot V_M \cdot \Delta e'_z(x) \cdot a = 0; \quad \Delta e'_z(x) = \frac{P \cdot \varepsilon}{2 \cdot V_M}$$

$$\Delta e_z(x) = \int \Delta e'_z(x) \cdot dx = \frac{P \cdot \varepsilon}{2 \cdot V_M} \cdot x + k$$

Diese Formel für die Aenderung der Exzentrizität der Biege-Spannglieder $\Delta e_z(x)$ ist analog zu derjenigen für die Exzentrizität der Torsions-Spannglieder bei der Lösung nach der 1. Regel.

Aus der Randbedingung $\Delta e_z(l) = 0$ erhält man für das Spannglied im vorderen Steg

$$\Delta e_{z,v}(x) = - \frac{P \cdot \varepsilon}{2 \cdot V_M} \cdot (l-x)$$

und für das Spannglied im hinteren Steg

$$\Delta e_{z,h}(x) = \frac{P \cdot \varepsilon}{2 \cdot V_M} \cdot (l-x)$$

Durch Einsetzen von V_M gewinnt man

$$\Delta e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{\varepsilon \cdot b}{l} \cdot (l-x)$$

Die Kontrolle der Biegemomente am Kragträgerende (x = 0) ergibt

$$M_y = V_M \cdot \Delta e_{z,v}(0) + V_M \cdot \Delta e_{z,h}(0) = V_M \cdot (-\varepsilon \cdot b) + V_M \cdot \varepsilon \cdot b = 0$$

$$M_z = V_M \cdot a - V_M \cdot a = 0$$

Grenzexzentrizität

Allgemein kann bei exzentrisch belasteten Trägern diejenige Lastexzentrizität, bis zu der die Torsion aus äusserer Belastung allein durch Verschieben der Biege-Spannglieder kompensiert werden kann, als Grenzexzentrizität bezeichnet werden. Beim vorliegenden Beispiel können am Kragträgerende die Biege-Spannglieder maximal um $\mp b$ verschoben werden:

$$\Delta e_{z,v,h}(0) = \mp \varepsilon \cdot b = \mp b$$

Dies entspricht $\varepsilon_{Gr} = 1$, d.h. die Einzellast P greift direkt über dem Steg an.

Für $\varepsilon > 1$ sind zusätzliche Torsions-Spannglieder erforderlich.

Vergleich des Spanngliedaufwandes nach 1. und 2. Regel

Der Vergleich wird für $\varepsilon = 1$ durchgeführt.

Nach 1. Regel: $V_{tot} = 2 \cdot V_M + 2 \cdot V_T = 2 \cdot \frac{P \cdot l}{2 \cdot b} + 2 \cdot \frac{P \cdot l}{4 \cdot b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P \cdot l}{b}$

Nach 2. Regel: $V_{tot} = 2 \cdot V_M = \frac{P \cdot l}{b}$

Die Einsparung bei Anwendung der 2.Regel gegenüber der 1. Regel beträgt 33%.

c) Lösung nach 2. Regel für $\varepsilon > 1$

Da die Verschiebung der Biege-Spannglieder nur bis zu $\Delta e_{z,v,h} = \mp b$ möglich ist, müssen bei $\varepsilon > \varepsilon_{Gr} = 1$ für die Resttorsion

$$T_R(p) = P \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{Gr}) \cdot a = P \cdot (\varepsilon - 1) \cdot a$$

spezielle Torsions-Spannglieder angeordnet werden.

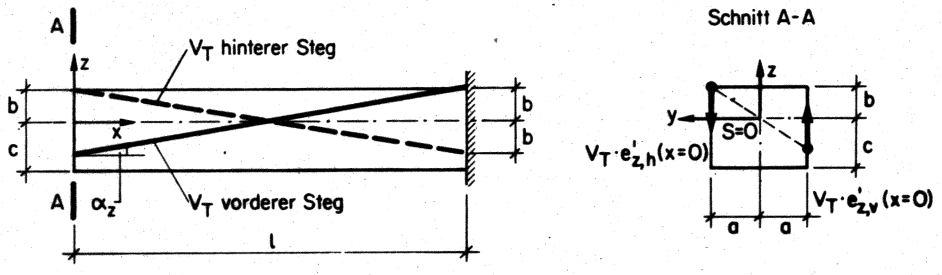


Bild 30: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Vorspannung für Resttorsion ($\varepsilon > \varepsilon_{Gr} = 1$)

$$T_R(p) + T(V_T) = 0: \qquad P \cdot (\varepsilon - 1) \cdot a - 2 \cdot V_T \cdot e'_z(x) \cdot a = 0 \quad ;$$

$$V_T = \frac{P \cdot (\varepsilon - 1) \cdot l}{4 \cdot b} \quad ; \quad e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{b}{l} \cdot (1 - 2 \cdot x) \ .$$

Für die Torsions-Spannglieder gelten somit bei der Lösung nach der 2. Regel die analogen Beziehungen wie für die Torsions-Spannglieder bei der Lösung

nach der 1. Regel.

Anstatt in den Stegen könnten die Torsions-Spannglieder auch in den Flanschen angeordnet werden (vgl. 1. Beispiel). Der Spanngliedaufwand bleibt dabei unter der Annahme Spanngliedlänge ≈ Stablänge der gleiche.

d) Lösung nach 3. Regel für $\varepsilon = 1$

Die Belastung P kann durch die vertikale Ankerkraftkomponente A_v eines 1. Spanngliedes direkt kompensiert werden:

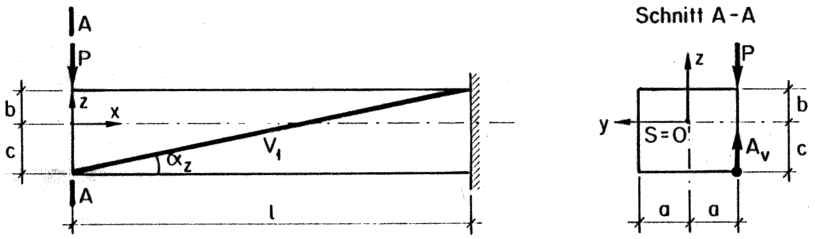
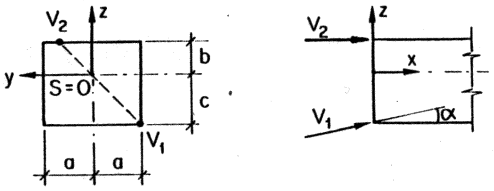


Bild 31: Kragträger mit exzentrischer Einzellast, Kompensation der äusseren Last durch vertikale Ankerkraftkomponente des 1. Spanngliedes

$$-P + A_v(V) = 0: \qquad -P + V_1 \cdot \frac{b + c}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{P \cdot l}{b + c}$$

Die horizontale Ankerkraftkomponente des 1. Spanngliedes erzeugt jedoch unerwünschte Biegemomente M_y und M_z. Diese müssen mit einem 2. Spannglied kompensiert werden:



$$V_2 = V_1 \cdot \frac{c}{b} = \frac{P \cdot l}{b + c} \cdot \frac{c}{b}$$

Bild 32: Kompensation der unerwünschten Schnittkräfte des 1. Spanngliedes durch 2. Spannglied

Kontrollen im Einspannquerschnitt (x = l):

$$M_y(p) + M_y(V) = -P \cdot l + V_1 \cdot b + V_2 \cdot b = -P \cdot l + b \cdot (V_1 + V_2)$$

$$= -P \cdot l + b \cdot P \cdot l \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{c}{(b+c) \cdot b}\right. = -P \cdot l + b \cdot \frac{P \cdot l}{b} = -P \cdot l + P \cdot l = 0$$

$$Q_z(p) + Q_z(V) = -P + V_1 \cdot \frac{b+c}{l} = -P + \frac{P \cdot l}{b+c} \cdot \frac{b+c}{l} = -P + P = 0$$

$$T(p) + T(V) = P \cdot a - V_1 \cdot \frac{b+c}{l} \cdot a = P \cdot a - \frac{P \cdot l}{b+c} \cdot \frac{b+c}{l} \cdot a = P \cdot a - P \cdot a = 0$$

Der Spanngliedaufwand nach der 3. Regel wird:

$$V_{tot} = V_1 + V_2 = \frac{P \cdot l}{b} \quad .$$

Er ist gleich gross wie nach der 2. Regel für $\varepsilon = 1$, wobei aber dort - im Gegensatz zu hier - die beiden Spannglieder die gleichen Spannkräfte aufweisen.

3. Beispiel: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast

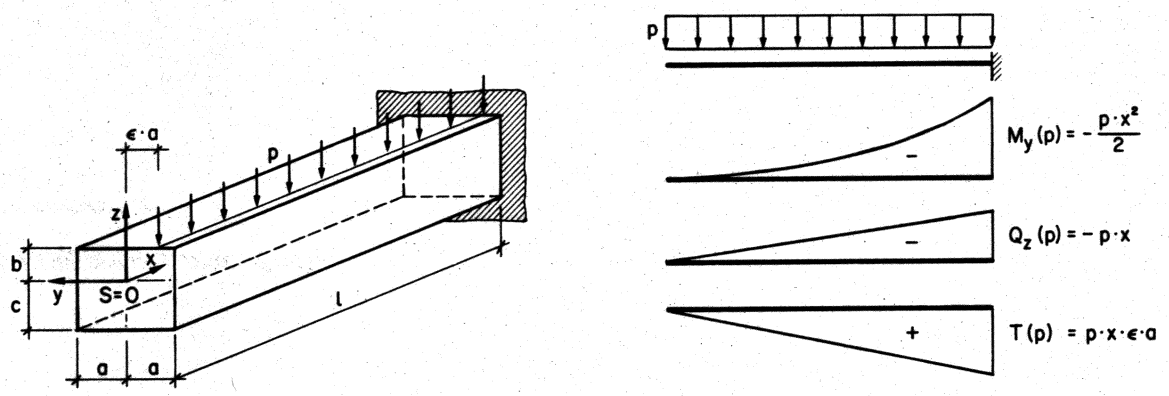


Bild 33: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast

a) Lösung nach 1. Regel

Bestimmen der Biege-Spannglieder

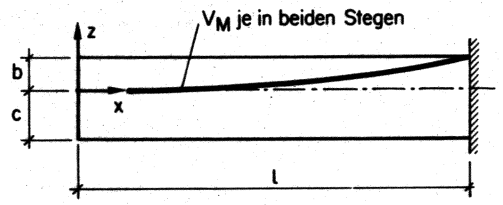


Bild 34: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast, Vorspannung für Biegung

$M_y(p) + M_y(V_M) = 0$: $\quad -\frac{p \cdot x^2}{2} + 2 \cdot V_M \cdot e_z(x) = 0$; $\quad e_z(x) = \frac{p \cdot x^2}{4 \cdot V_M}$.

Mit $e_z(l) = b$ wird $\quad V_M = \frac{p \cdot l^2}{4 \cdot b}$,

und somit $\quad e_z(x) = \frac{p \cdot x^2 \cdot 4 \cdot b}{4 \cdot p \cdot l^2} = b \cdot \frac{x^2}{l^2}$.

Die Querkraft Q_z ergibt sich im Querschnitt x zu

$$Q_z(p) + Q_z(V_M) = -p \cdot x + 2 \cdot V_M \cdot e_z'(x) = -p \cdot x + 2 \cdot \frac{p \cdot l^2}{4 \cdot b} \cdot \frac{b \cdot 2 \cdot x}{l^2} = -p \cdot x + p \cdot x = 0 \ .$$

Durch die formtreue Vorspannung für Biegung werden - wie beim 2. Beispiel - auch die zugehörigen Querkräfte kompensiert.

Bestimmen der Torsions-Spannglieder (in den Stegen)

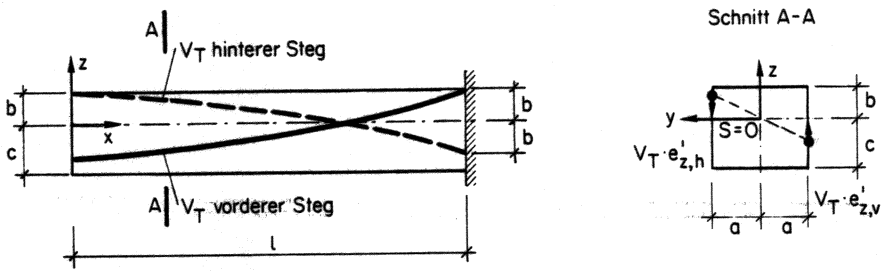


Bild 35: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast, Vorspannung für Torsion

$T(p) + T(V_T) = 0$: $\quad p \cdot x \cdot \varepsilon \cdot a - 2 \cdot V_T \cdot e'_z(x) \cdot a = 0$; $\quad e'_z(x) = \frac{p \cdot \varepsilon}{2 \cdot V_T} \cdot x$;

$$e_z(x) = \int e'_z(x) \cdot dx = \frac{p \cdot \varepsilon}{4 \cdot V_T} \cdot x^2 + k \ .$$

Unter Ausnützung der maximal möglichen Exzentrizitäten ergibt sich für das vordere Spannglied mit der Randbedingung $e_z(0) = -b$

$$e_{z,v}(x) = \frac{p \cdot \varepsilon}{4 \cdot V_T} \cdot x^2 - b \ ,$$

und für das hintere Spannglied mit der Randbedingung $e_z(0) = +b$

$$e_{z,h}(x) = - \frac{p \cdot \varepsilon}{4 \cdot V_T} \cdot x^2 + b \ .$$

Mit der Randbedingung $e_z(l) = b$ (vorderes Spannglied) wird

$$V_T = \frac{p \cdot \varepsilon \cdot l^2}{8 \cdot b} \ ,$$

und somit

$$e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{b}{l^2} \cdot (l^2 - 2 \cdot x^2) \ .$$

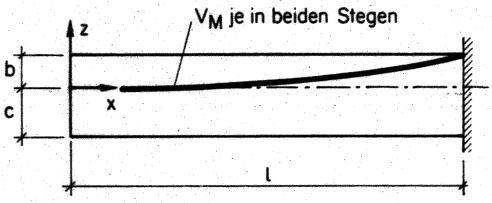
Grössere Exzentrizitäten sind nicht möglich, da sonst Biegemomente $M_y(V)$ entstehen würden.

Eine Querkraft Q_z wird durch die Torsions-Spannglieder nicht erzeugt, da sich deren vertikale Komponenten in den beiden Stegen kompensieren.

Die Biege- und Torsions-Spannglieder jedes Steges könnten - wie beim 2. Beispiel - mit Hilfe einer Momentenbedingung der entsprechenden Vorspannkräfte vereinigt werden.

b) Lösung nach 2. Regel für $\varepsilon < 1$

Bestimmen der Biege-Spannglieder



$$V_M = \frac{p \cdot l^2}{4 \cdot b} \quad \text{(gleich wie nach 1. Regel)}$$

$$e_z(x) = b \cdot \frac{x^2}{l^2}$$

Bild 36: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast, Vorspannung für Biegung

Verschieben der Biege-Spannglieder

Wie beim 2. Beispiel werden zwecks Kompensation der Torsionsmomente aus äusserer Belastung die beiden Biege-Spannglieder in entgegengesetzter Richtung verschoben. Dabei erhält das Spannglied im lastnahen Steg eine grössere Neigung und eine grössere Krümmung als das Spannglied im lastfernen Steg. Die Biegemomente aus Vorspannung werden dadurch nicht verändert.

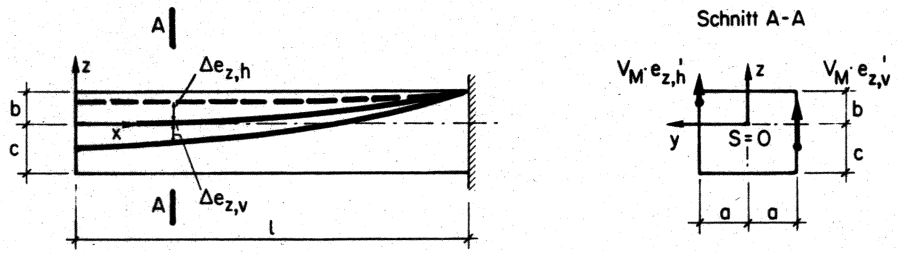


Bild 37: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast, Vorspannung für Torsion durch Verschieben der Biege-Spannglieder

In der Torsionsgleichung (5a) ist wiederum anstelle der Ableitung der Exzentrizitätsfunktion $e'_z(x)$ die Ableitung der Verschiebungsfunktion $\Delta e'_z(x)$ einzusetzen:

$$T(p) + T(V_M) = 0: \qquad p \cdot x \cdot \varepsilon \cdot a - 2 \cdot V_M \cdot \Delta e'_z(x) \cdot a = 0; \qquad \Delta e'_z(x) = \frac{p \cdot \varepsilon}{2 \cdot V_M} \cdot x \;;$$

$$\Delta e_z(x) = \int \Delta e'_z(x)\, dx = \frac{p \cdot \varepsilon}{4 \cdot V_M} \cdot x^2 + k \;.$$

Diese Formel für die Aenderung der Exzentrizität der Biege-Spannglieder $\Delta e_z(x)$ ist analog zu derjenigen für die Exzentrizität der Torsions-Spannglieder bei der Lösung nach der 1. Regel.

Aus der Randbedingung $\Delta e_z(l) = 0$ erhält man für das Spannglied im vorderen Steg

$$\Delta e_{z,v}(x) = -\frac{p \cdot \varepsilon}{4 \cdot V_M} \cdot (l^2 - x^2) \quad ,$$

und für das Spannglied im hinteren Steg

$$\Delta e_{z,h}(x) = \frac{p \cdot \varepsilon}{4 \cdot V_M} \cdot (l^2 - x^2) \ .$$

Durch Einsetzen von V_M gewinnt man

$$\Delta e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{\varepsilon \cdot b}{l^2} \cdot (l^2 - x^2) \ .$$

Die Kontrolle der Biegemomente am Kragträgerende (x = 0) ergibt

$$M_y = V_M \cdot \Delta e_{z,v}(0) + V_M \cdot \Delta e_{z,h}(0) = V_M \cdot (-\varepsilon \cdot b) + V_M \cdot \varepsilon \cdot b = 0 \ ,$$

$$M_z = V_M \cdot a - V_M \cdot a = 0 \ .$$

Grenzexzentrizität

Die Torsion infolge exzentrischer äusserer Belastung kann wiederum bis zu einer Grenzexzentrizität ε_{Gr} allein durch Verschieben der Biege-Spannglieder kompensiert werden. Am Kragträgerende können die Spannglieder maximal um $\mp b$ verschoben werden:

$$\Delta e_{z,v,h}(0) = \mp b = \mp \varepsilon \cdot b \ .$$

Dies entspricht $\varepsilon_{Gr} = 1$, d.h. die Gleichlast p greift direkt über dem Steg an. Für $\varepsilon > \varepsilon_{Gr} = 1$ sind zusätzliche Torsions-Spannglieder erforderlich.

Vergleich des Spanngliedaufwandes nach 1. und 2. Regel

Der Vergleich wird für $\varepsilon = 1$ durchgeführt:

Nach 1. Regel: $V_{tot} = 2 \cdot V_M + 2 \cdot V_T = 2 \cdot \frac{p \cdot l^2}{4 \cdot b} + 2 \cdot \frac{p \cdot l^2}{8 \cdot b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{p \cdot l^2}{b}$

Nach 2. Regel: $V_{tot} = 2 \cdot V_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{p \cdot l^2}{b}$.

Die Einsparung bei Anwendung der 2. Regel gegenüber der 1. Regel beträgt 33%.

c) Lösung nach 2. Regel für $\varepsilon > 1$

Da die Verschiebung der Biege-Spannglieder nur bis zu $\Delta e_{z,v,h} = \mp b$ möglich ist, müssen bei $\varepsilon > \varepsilon_{Gr} = 1$ für die Resttorsion

$$T_R(p) = p \cdot x \cdot (\varepsilon - \varepsilon_{Gr}) \cdot a = p \cdot x \cdot (\varepsilon - 1) \cdot a$$

spezielle Torsions-Spannglieder angeordnet werden.

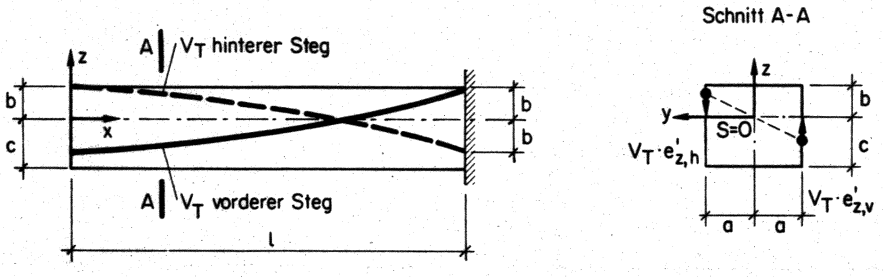


Bild 38: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast, Vorspannung für Resttorsion ($\epsilon > \epsilon_{Gr} = 1$)

$$T_R(p) + T(V_T) = 0: \qquad p \cdot x \cdot (\varepsilon - 1) \cdot a = 2 \cdot V_T \cdot e'_z(x) \cdot a = 0 \quad ;$$

$$V_T = \frac{p \cdot (\varepsilon - 1) \cdot l^2}{8 \cdot b} \quad ; \qquad e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{b}{l^2} \cdot (l^2 - 2 \cdot x^2) \ .$$

Für die Torsions-Spannglieder gelten somit bei der Lösung nach der 2. Regel die analogen Beziehungen wie für die Torsions-Spannglieder bei der Lösung nach der 1. Regel.

Anstatt in die Stege könnten die Torsions-Spannglieder auch in den Flanschen angeordnet werden (vgl. 1. Beispiel). Der Spanngliedaufwand bleibt dabei unter der Annahme Spanngliedlänge ≈ Stablänge der gleiche.

d) Lösung nach 3. Regel für $\varepsilon = 1$

Die Belastung p kann durch die vertikalen Umlenkkräfte eines parabelförmigen 1. Spanngliedes direkt kompensiert werden.

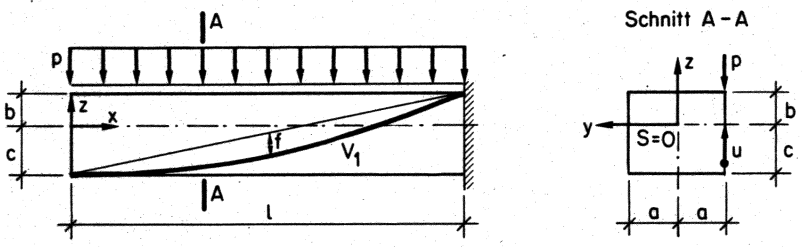
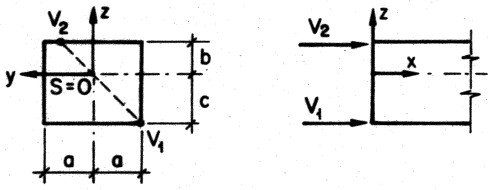


Bild 39: Kragträger mit exzentrischer Gleichlast, Kompensation der äusseren Last durch die Umlenkkräfte des 1. Spanngliedes

$$-p + u(V_1) = 0: \qquad -p + \frac{8 \cdot V_1 \cdot f}{l^2} = 0; \qquad V_1 = \frac{p \cdot l^2}{8 \cdot f} = \frac{p \cdot l^2}{2 \cdot (b+c)} \ , \text{ wobei } f = \frac{b+c}{4} \ .$$

Die horizontale Ankerkraft des 1. Spanngliedes erzeugt jedoch unerwünschte Biegemomente M_y und M_z. Diese müssen mit einem 2. Spannglied kompensiert werden:



$$V_2 = V_1 \cdot \frac{c}{b} = \frac{p \cdot l^2}{2 \cdot (b+c)} \cdot \frac{c}{b}$$

Bild 40: Kompensation der unerwünschten Schnittkräfte des 1. Spanngliedes durch 2. Spannglied

Kontrollen im Einspannquerschnitt (x = l):

$$M_y(p) + M_y(V) = -\frac{p\cdot l^2}{2} + V_1\cdot b + V_2\cdot b = -\frac{p\cdot l^2}{2} + b\cdot(V_1+V_2)$$

$$= -\frac{p\cdot l^2}{2} + \frac{b\cdot p\cdot l^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{b+c} + \frac{c}{(b+c)\ b}\right) = -\frac{p\cdot l^2}{2} + \frac{b\cdot p\cdot l^2}{2\cdot b}$$

$$= -\frac{p\cdot l^2}{2} + \frac{p\cdot l^2}{2} = 0$$

$$Q_z(p) + Q_z(V) = -p\cdot l + V_1\cdot\frac{(b+c)\cdot 2}{l} = -p\cdot l + \frac{p\cdot l^2}{2\cdot(b+c)}\cdot\frac{(b+c)\cdot 2}{l} = -p\cdot l + p\cdot l = 0$$

$$T_z(p) + T_z(V) = p\cdot l\cdot a - V_1\cdot\frac{(b+c)\cdot 2}{l}\cdot a = p\cdot l\cdot a - \frac{p\cdot l^2}{2\cdot(b+c)}\cdot\frac{(b+c)\cdot 2}{l}\cdot a$$

$$= p\cdot l\cdot a - p\cdot l\cdot a = 0$$

Der Spanngliedaufwand ergibt sich zu

$$V_{tot} = V_1 + V_2 = \frac{p\cdot l^2}{2\cdot b} \quad .$$

Er ist gleich gross wie nach der 2. Regel für $\varepsilon = 1$, wobei dort - im Gegensatz zu hier - die beiden Spannglieder die gleichen Spannkräfte aufweisen.

4. Beispiel: Gekrümmter Kragträger

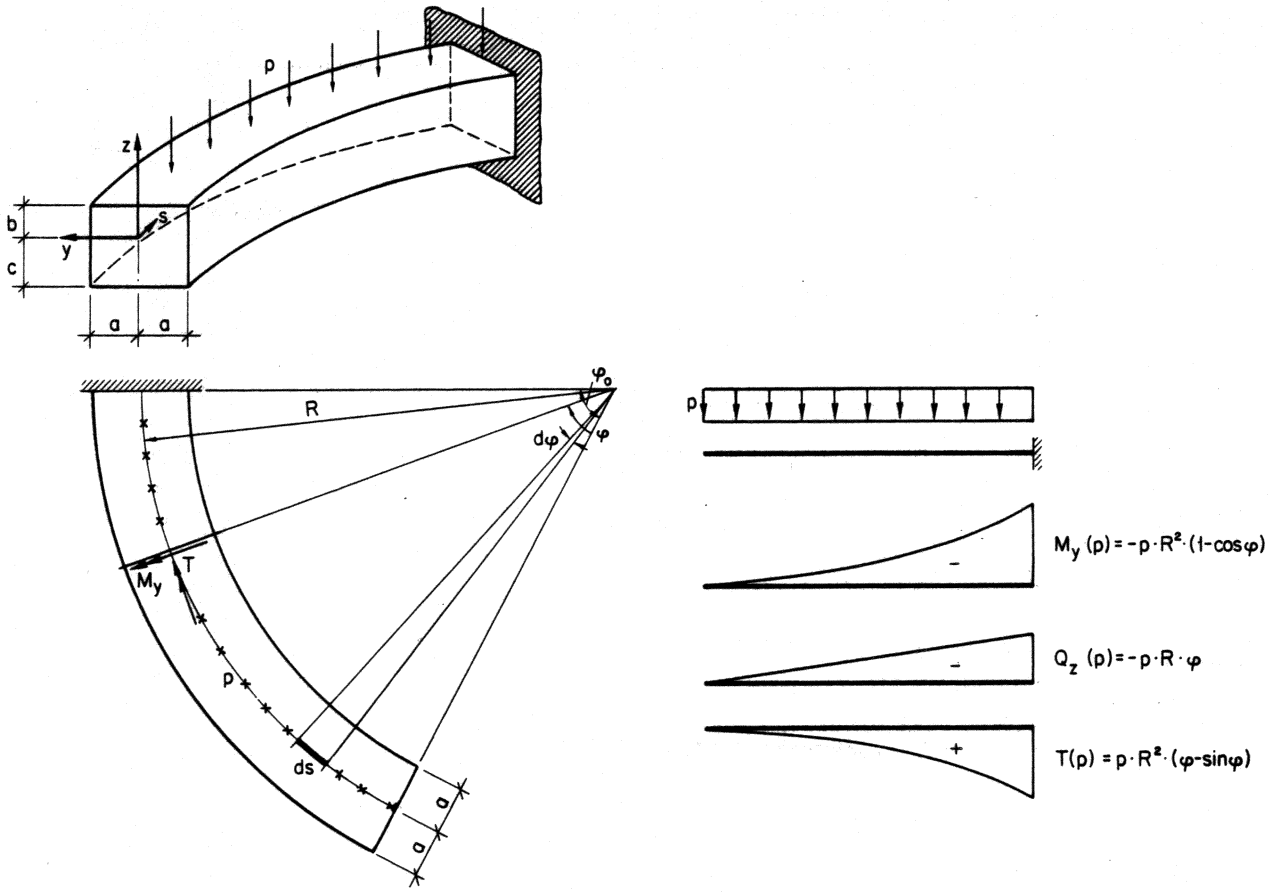


Bild 41: Gekrümmter Kragträger

a) Lösung nach 2. Regel

Bestimmen der Biege-Spannglieder

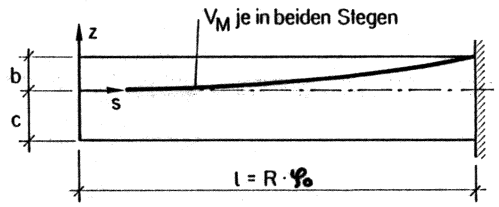


Bild 42 : Gekrümmter Kragträger, Vorspannung für Biegung

$M_y(p) + M_y(V_M) = 0$: $\quad -p \cdot R^2 \cdot (1-\cos\varphi) + 2 \cdot V_M \cdot e_z(\varphi) = 0$

$$e_z(\varphi) = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot V_M} \cdot (1-\cos\varphi)$$

Mit $e_z(\varphi_o) = b$ wird $V_M = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot b} \cdot (1-\cos\varphi_o)$

und somit $\quad e_z(\varphi) = b \cdot \frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\varphi_o}$

Für kleinere Oeffnungswinkel entspricht der Verlauf von $M_y(p)$ und damit auch von $e_z(\varphi)$ mit guter Genauigkeit einer quadratischen Parabel (Beweis durch Reihenentwicklung von $\cos\varphi$). Man könnte deshalb die Biege-Spannglieder näherungsweise auch am gestreckten Balken bemessen.

Die Querkraft Q_z ergibt sich im Querschnitt x zu

$$Q_z(p) + Q_z(V_M) = -p \cdot R \cdot \varphi + 2 \cdot V_M \cdot \frac{de_z(s)}{ds}$$

Mit $\quad \frac{de_z(s)}{ds} = \frac{de_z(\varphi)}{R \cdot d\varphi} = \frac{e_z'(\varphi)}{R} = \frac{b}{R} \cdot \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi_o}$

wird $\quad -p \cdot R \cdot \varphi + 2 \cdot \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot b} \cdot (1-\cos\varphi_o) \cdot \frac{b}{R} \cdot \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi_o} = -p \cdot R \cdot (\varphi - \sin\varphi) \neq 0$

Am gekrümmten Träger werden somit - im Gegensatz zum geraden Träger - durch die formtreue Vorspannung für Biegung die zugehörigen Querkräfte nicht genau kompensiert.

Dies kann wie folgt erklärt werden:
Formtreue Vorspannung für Biegung, d.h. $M_y(p) + M_y(V_M) = 0$, bedeutet auch

$$\frac{dM_y(p)}{ds} + \frac{dM_y(V_M)}{ds} = 0$$

Die allgemeine Gleichung für die Querkraft aus äusserer Last am gekrümmten

Träger lautet

$$Q_z(p) = \frac{dM_y(p)}{ds} - \frac{T(p)}{R}$$

Andererseits gilt

$$Q_z(V_M) = \frac{dM_y(V_M)}{ds}$$

Daher ergibt sich eine restliche Querkraft von

$$Q_z(p) + Q_z(V_M) = -\frac{T(p)}{R}$$

Für die Querkraft ergibt sich also keine "reine" formtreue Vorspannung. Es resultiert eine - verhältnismässig kleine - Restquerkraft.

Verschieben der Biege-Spannglieder

Durch Absenken des vorderen (inneren) resp. Anheben des hinteren (äusseren) Spanngliedes soll das Torsionsmoment aus äusserer Last T(p) genau kompensiert werden. T(p) kann aus der für kleine Krümmungen gültigen Näherungsformel

$$T(p) = -\int \frac{M}{R} \cdot ds$$

ermittelt werden.

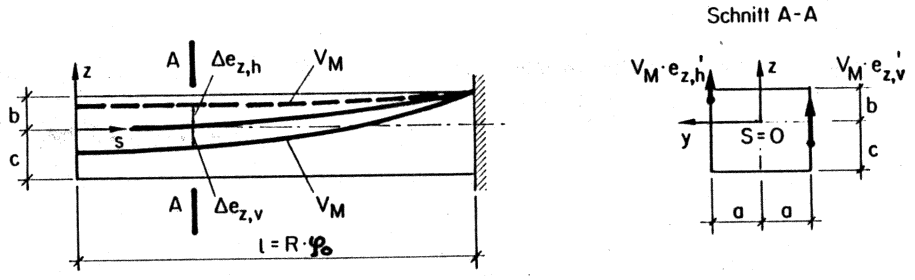


Bild 43: Gekrümmter Kragträger, Vorspannung für Torsion durch Verschieben der Biege-Spannglieder

$$T(p) + T(V_M) = 0: \qquad p \cdot R^2 \cdot (\varphi - \sin\varphi) - 2 \cdot V_M \cdot \frac{d\Delta e_z}{ds} \cdot a = 0$$

$$\frac{d\Delta e_z}{ds} = \frac{d\Delta e_z(\varphi)}{R \cdot d\varphi} = \frac{\Delta e'_z(\varphi)}{R}$$

$$\Delta e'_z(\varphi) = \frac{p \cdot R^3}{2 \cdot a \cdot V_M} \cdot (\varphi - \sin\varphi)$$

$$\Delta e_z(\varphi) = \int \Delta e'_z(\varphi) \cdot d\varphi = \frac{p \cdot R^3}{2 \cdot a \cdot V_M} \cdot \left(\frac{\varphi^2}{2} + \cos\varphi\right) + k$$

Mit der Randbedingung $\Delta e_z(\varphi_o) = 0$ erhält man

$$k = -\frac{p \cdot R^3}{2 \cdot a \cdot V_M} \cdot \left(\frac{\varphi_o^2}{2} + \cos\varphi_o\right)$$

und damit

$$\Delta e_{z,v,h}(\varphi) = \mp \frac{p \cdot R^3}{2 \cdot a \cdot V_M} \cdot \left(\frac{\varphi_o^2 - \varphi^2}{2} + \cos\varphi_o - \cos\varphi\right)$$

Grenzwinkel

An die Stelle der Grenzexzentrizität bei exzentrisch belasteten geraden Trägern tritt bei gekrümmten Trägern der Grenzwinkel, bis zu welchem die Torsion aus äusserer Belastung allein durch Verschieben der Biege-Spannglieder kompensiert werden kann.

Für den Grenzwinkel φ_{Gr} beim Kragträger wird die Bedingung massgebend, dass nach der Verschiebung das Spannglied im hinteren, äusseren Steg im Einspannquerschnitt im Extremfall eine horizontale Tangente aufweisen muss [1].

$$e_{z,h}(\varphi) = b\cdot\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\varphi_o} + \frac{p\cdot R^3}{2\cdot V_M\cdot a}\cdot\left(\frac{\varphi_o^2-\varphi^2}{2} + \cos\varphi_o-\cos\varphi\right)$$

$$\frac{de_z}{ds} = b\cdot\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi_o} + \frac{p\cdot R^3}{2\cdot V_M\cdot a}\cdot(\varphi-\sin\varphi) = 0$$

V_M eingesetzt: $\frac{a}{R}\cdot\sin\varphi + \varphi-\sin\varphi = 0$

Mit sin-Reihe: $\frac{a}{R}\cdot\left(\varphi-\frac{\varphi^3}{6} + \ldots\right) + \varphi-\varphi + \frac{\varphi^3}{6} - \ldots = 0$

$$-\frac{\varphi^3}{6}\cdot\left(1+\frac{a}{R}\right) \simeq \varphi\cdot\frac{a}{R} \quad\rightarrow\quad \varphi_{Gr} \simeq \sqrt{\frac{6\cdot\frac{a}{R}}{1+\frac{a}{R}}} \qquad \underline{\text{Grenzwinkel}}$$

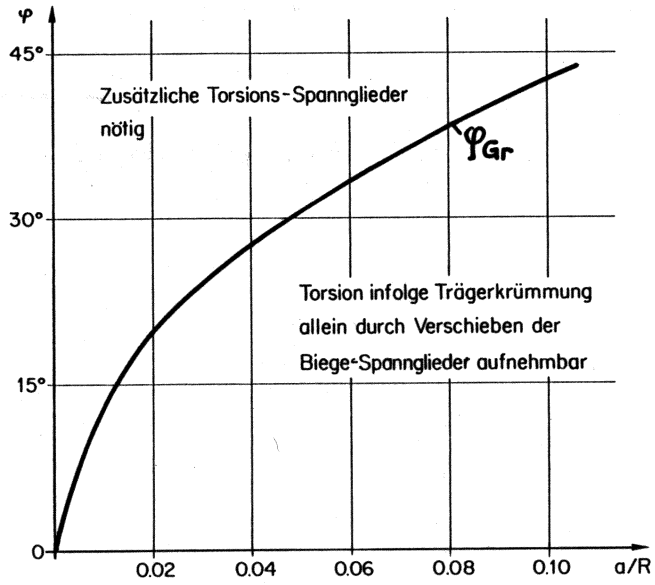


Bild 44: Grenzwinkel φ_{Gr}

Zahlenbeispiel:

Für a = 3 m und R = 100 m wird $\varphi_{Gr} \simeq 24^o$, d.h. $l_{Gr} \simeq 42$ m.

Für $\varphi_o > \varphi_{Gr}$ sind zur Kompensation der Resttorsion T_R spezielle Torsions-Spannglieder erforderlich, die zweckmässigerweise in den Flanschen angeordnet werden.

Bemerkung:

Die gezeigte Lösung mit dem Verschieben der Biege-Spannglieder ist insofern eine Näherung als der Krümmungs- bzw. Längenunterschied zwischen dem inneren und äusseren Steg nicht berücksichtigt wird $(R/(R \pm a) \approx 1)$. Eine genauere Lösung (siehe z.B. auch [1]) ist jedoch wesentlich aufwendiger und weniger anschaulich. Für die meisten Fälle der Praxis ist die Abweichung unbedeutend.

b) Lösung für exzentrische Gleichlast

Greift beim gekrümmten Träger die Gleichlast exzentrisch an, so können für formtreue Vorspannung eine 1. Verschiebung der Biege-Spannglieder zur Kompensation der Torsion infolge Lastexzentrizität und eine 2. Verschiebung zur Kompensation der Torsion infolge Trägerkrümmung vorgenommen werden. Dabei können sowohl das Torsionsmoment aus der Lastexzentrizität als auch die entsprechende Verschiebung der Biege-Spannglieder näherungsweise am analogen geraden, d.h. gestreckten, Träger ermittelt werden.

Durch eine Lastexzentrizität bzw. eine entsprechende Verschiebung der Biege-Spannglieder wird der oben für zentrische Last definierte Grenzwinkel φ_{Gr} verändert. Greift die Gleichlast zwischen der Axe und dem äusseren Steg des Trägers an, so wirken sich Torsionsmomente aus Trägerkrümmung und aus Lastexzentrizität entgegen; φ_{Gr} wird vergrössert. Greift die Gleichlast zwischen der Trägeraxe und dem inneren Steg an, so ist das Umgekehrte der Fall. Befindet sich die Gleichlast direkt über dem inneren Steg, so wird $\varphi_{Gr} = 0$.

Folgerungen

Aufgrund der vier Kragträger-Beispiele können wesentliche Folgerungen für die formtreue Vorspannung statisch bestimmter Systeme festgehalten werden.

Gerade Träger mit exzentrischer Belastung

Bei exzentrisch belasteten geraden Trägern ist die Gleichung für den Verlauf des Torsionsmomentes längs der Stabaxe stets eine Ordnung höher als die Gleichung für den Verlauf der zugehörigen Belastung. Und für formtreue Vorspannung ist die Gleichung für den Verlauf der Exzentrizität von Torsions-Spanngliedern bzw. der Verschiebung von Biege-Spanngliedern wiederum eine Ordnung höher als die Gleichung für den Verlauf des Torsionsmomentes. Diese Zusammenhänge veranschaulicht die Uebersicht in Tabelle 1.

Belastung	Verlauf des Torsionsmomentes	Verlauf der Torsions-Spannglieder bzw. Verlauf der Verschiebung der Biege-Spannglieder
P Einzellast	konstant	linear
p Gleichlast	linear	quadratisch

Tabelle 1: Zusammenhang zwischen Belastung, Torsionsmoment und Spanngliedern für formtreue Vorspannung bei exzentrisch belasteten geraden Trägern

Gekrümmte Träger

Bei mässig gekrümmten Trägern können die Einflüsse der Trägerkrümmung und der Lastexzentrizität getrennt behandelt werden.

Kompensation der Querkräfte

Bezüglich der Kompensation der Querkräfte gelten die folgenden Sätze:

> 4. Satz:
> Am geraden Träger werden durch formtreue Vorspannung für Biegung auch die zugehörigen Querkräfte kompensiert.

> 5. Satz:
> Am gekrümmten Träger werden durch formtreue Vorspannung für Biegung die zugehörigen Querkräfte nicht genau kompensiert.

1.2.3 Statisch unbestimmte Systeme

Bei der formtreuen Vorspannung statisch unbestimmter Systeme können zwei Möglichkeiten unterschieden werden.

Formtreue Vorspannung der einzelnen Teile eines Grundsystems

Das folgende Vorgehen führt stets zu einer grundsätzlich möglichen Lösung:

1. Wahl eines statisch bestimmten Grundsystems
2. Formtreue Vorspannung der belasteten Teile des Grundsystems.

Durch eine formtreue Vorspannung der belasteten Teile des Grundsystems werden in diesen Teilen sämtliche Schnittkräfte und Verformungen aus äusseren

Lasten durch die Schnittkräfte und Verformungen aus Vorspannung kompensiert, d.h. sämtliche Teile des Grundsystems befinden sich in einem schnittkraftfreien und unverformten Zustand*). Fügt man in Gedanken die einzelnen Teile wieder zusammen, so entstehen keine weiteren Schnittkräfte.

Betrachtet man die beiden Lastfälle am wirklichen, statisch unbestimmten System, so gilt der folgende

> 6. Satz:
> Bei der formtreuen Vorspannung eines statisch unbestimmten Systems durch formtreue Vorspannung der einzelnen Teile eines Grundsystems kompensieren sich die Verträglichkeits-Schnittkräfte aus äusserer Belastung und aus Vorspannung.

Da bei einem statisch unbestimmten System meist verschiedene Grundsysteme gewählt werden können, sind für die formtreue Vorspannung verschiedene Lösungen möglich.

Formtreue Vorspannung des wirklichen Systems für Biegung

Die formtreue Vorspannung statisch unbestimmter Systeme durch formtreue Vorspannung eines Grundsystems - und somit ohne Rücksicht auf das wirkliche System - führt nicht immer zu zweckmässigen Lösungen. Dies gilt vor allem bei der formtreuen Vorspannung von Durchlaufträgern für Biegung. Wird beim dargelegten Vorgehen ein Grundsystem aus einfachen Balken verwendet, so verlaufen die Spannglieder über den Zwischenstützen durch die Schweraxe des Querschnittes (Bild 45a). Im Hinblick auf den Spanngliedaufwand und das Ver-

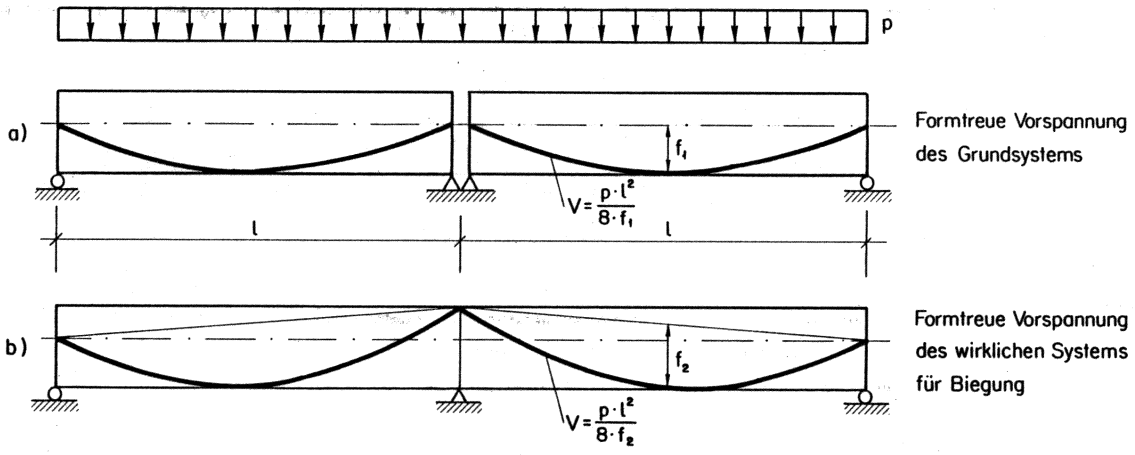


Bild 45: Formtreue Vorspannung eines Durchlaufträgers

*) Gilt für Biegemomente, Querkräfte und Torsionsmomente, nicht aber für Normalkräfte und entsprechende Längenänderungen. Voraussetzung ist ferner, dass sich das statisch unbestimmte System ohne Zwängungen verkürzen kann, d.h., dass infolge Längenänderung aus Vorspannung keine Schnittkräfte entstehen. Zum Beispiel ergibt sich bei einem Rahmen mit festgehaltenen Fusspunkten und vorgespanntem Riegel keine exakte formtreue Vorspannung.

halten im Riss- und Bruchzustand sollten jedoch auch bei Durchlaufträgern mit Torsionsbeanspruchung über den Zwischenstützen die möglichen Exzentrizitäten voll ausgenützt, d.h. die Spannglieder sollten bis zum oberen Trägerrand angehoben werden. In solchen Fällen ist es besser, direkt eine formtreue Vorspannung des wirklichen Systems für Biegung anzustreben (Bild 45b).

Bei einer solchen Vorspannung kompensieren sich wohl die gesamten Biegemomente aus äusserer Belastung und aus Vorspannung, nicht aber deren Anteile in einem Grundsystem einerseits und aus Verträglichkeit andererseits. Die Verträglichkeits-Biegemomente aus äusserer Belastung und diejenigen aus Vorspannung sind nicht entgegengesetzt gleich gross. Dies hat Folgen für die Kompensation von Verträglichkeits-Torsionsmomenten, sofern diese mit den Verträglichkeits-Biegemomenten gekoppelt sind. Bei exzentrisch belasteten geraden Durchlaufträgern ist dies nicht der Fall. Bei schief gelagerten geraden Durchlaufträgern werden durch die formtreue Vorspannung des wirklichen Systems bzw. durch das Anheben der Biege-Spannglieder über den Zwischenstützen wohl die Verträglichkeits-Biegemomente aus Durchlaufwirkung verändert, doch hat dies auf die Verträglichkeits-Biegemomente aus schiefer Lagerung und damit auf die Verträglichkeits-Torsionsmomente keinen Einfluss. Bei gekrümmten Trägern hingegen sind Verträglichkeits-Biegemomente aus Durchlaufwirkung und Verträglichkeits-Torsionsmomente miteinander gekoppelt. Es gilt daher der folgende

> 7. Satz:
> Bei der Vorspannung eines gekrümmten Durchlaufträgers durch formtreue Vorspannung des wirklichen Systems für Biegung kann die Verträglichkeits-Torsion aus äusserer Belastung nicht voll kompensiert werden.

Es handelt sich somit in einem solchen Fall nicht um eine "reine" formtreue Vorspannung.

1.3 Praktische Vorspannung

1.3.1 Allgemeines

Bei vorgespannten Tragwerken können bezüglich des Vorgehens beim Entwerfen der Spannglieder generell zwei Gruppen unterschieden werden:

I. Zentrisch belastete gerade Ein- und Mehrfeldträger, Rahmen, usw.

Bei diesen Systemen der täglichen Konstruktionspraxis wird man nur in besonderen Fällen die Prinzipien der formtreuen Vorspannung anwenden. Normalerweise ist der übliche Arbeitsablauf zweckmässig:

- Wahl des Vorspanngrades in den massgebenden Querschnitten
- Entwurf der Spannglieder mit Spanngliedführung etwa affin zur Momentenfläche.
- Berechnung der Schnittkräfte infolge Vorspannung.
- Iterative Veränderung der Spanngliedführung und der Spannkräfte.
- Bemessung der vorgespannten und der schlaffen Bewehrung.
- Tragfähigkeits- und Gebrauchsfähigkeits-Nachweise.

II. Exzentrisch belastete, gekrümmte, schief gelagerte Ein- und Mehrfeldträger

Bei exzentrisch belasteten, bei gekrümmten und bei schief gelagerten Stabtragwerken, bei denen mit der Vorspannung auch einer erheblichen Torsion aus äusserer Belastung entgegengewirkt werden soll, können die Fälle

- "reine" formtreue Vorspannung und
- "möglichst" formtreue Vorspannung,

beide für eine bestimmte äussere Belastung p, unterschieden werden.

Bei der reinen formtreuen Vorspannung werden M(p), Q(p) und T(p) voll kompensiert, wobei jedoch auch hier der Einfluss der Spanngliedreibung zu - meist geringen - Rest-Schnittkräften führt. Bei der möglichst formtreuen Vorspannung hingegen kann vor allem T(p) nicht voll kompensiert werden. Eine reine formtreue Vorspannung ist bei Kragträgern und Einfeldträgern oft möglich, wohingegen bei Durchlaufträgern meist nur eine möglichst formtreue Vorspannung erreicht werden kann.

Normalerweise ist der folgende Arbeitsablauf zweckmässig:

- Wahl der zu kompensierenden Belastung (z.B. ständige Last oder ein Teil derselben) oder Wahl des Vorspanngrades in den massgebenden Querschnitten für eine bestimmte Belastung (z.B. volle Vorspannung für ständige Last).
- Entwurf der Spannglieder mit Hilfe der nachstehenden allgemeinen Vorgehensregel.

- Berechnung der Schnittkräfte infolge Vorspannung (meist mittels Computerprogramm).
- Sofern erforderlich: Iterative Veränderung der Spanngliedführung und der Spannkräfte.
- Bemessung der vorgespannten und der schlaffen Bewehrung.
- Tragfähigkeits- und Gebrauchsfähigkeits-Nachweise.

Bei der Wahl der zu kompensierenden Belastung bzw. des Vorspanngrades für eine bestimmte Belastung sind die folgenden Aspekte zu beachten:

- Bei formtreuer Vorspannung für Biegung bleiben im Vergleich zu einer vollen Vorspannung - beide für eine bestimmte Belastung p - auf der Zugseite der Querschnitte die Druckspannungen infolge der Normalkraft N(V) und eine allfällige zulässige Zugspannung σ_{zul} "in Reserve". Dies ist aus der Spannungsbedingung für volle Vorspannung ersichtlich.

$$\underbrace{\frac{M(p)}{W} - \frac{V \cdot e}{W}}_{\text{kompensieren sich bei formtreuer Vorspannung}} - \underbrace{\frac{V}{F} - \sigma_{zul}}_{\text{werden bei formtreuer Vorspannung nicht berücksichtigt}} \leq 0$$

W : Widerstandsmoment des Querschnittes

F : Querschnittsfläche

Eine formtreue Vorspannung erfordert somit eine meist erheblich grössere Vorspannkraft als eine volle Vorspannung für dieselbe Belastung.

- Möglichkeit zur teilweisen Vorspannung.
- Konstruktive Gesichtspunkte wie Platzverhältnisse für die Anker, Anordnung der Bewehrungen, Bauzustände, usw.
- Wirtschaftliche Gesichtspunkte wie Preisverhältnis zwischen vorgespannter und schlaffer Bewehrung, usw.

Bei Tragwerken mit wesentlicher Torsion wird als zu kompensierende Belastung häufig die ständige Last gewählt oder volle Vorspannung für ständige Last angestrebt.

1.3.2 Vorgehen beim Entwerfen der Spannglieder

Für das Entwerfen der Spannglieder in exzentrisch belasteten, in gekrümmten und in schief gelagerten Stabtragwerken können die Erkenntnisse aus den Abschnitten 1.2.2 und 1.2.3 mit den praktischen Erfordernissen vereint werden. Es ergibt sich folgende

Allgemeine Vorgehensregel

1. Schnittkräfte M(p), Q(p) und T(p) aus äusserer Belastung bestimmen, wobei zwischen Gleichgewichtstorsion $T_{Gl}(p)$ und Verträglichkeitstorsion $T_{Vt}(p)$ zu unterscheiden ist.
2. Durch "Biege-Spannglieder" an einem Grundsystem oder am wirklichen System M(p) kompensieren.
3. Biege-Spannglieder derart verschieben, dass die Gleichgewichtstorsion $T_{Gl}(p)$ sowie - bei gekrümmten Trägern - eine noch vorhandene Verträglichkeitstorsion $T_{Vt}(p)$ so weit wie möglich kompensiert werden.
4. Sofern noch erforderlich und zweckmässig: Durch "Torsions-Spannglieder" die restliche Torsion $T_R(p)$ kompensieren.

Bei Systemen, die Gleichgewichtstorsion aufweisen (exzentrisch belastete und gekrümmte Stäbe), sind alle drei bzw. vier Schritte durchzuführen. Bei Systemen, die nur Verträglichkeitstorsion aufweisen (schief gelagerte Stäbe), sind nur die ersten beiden Schritte erforderlich.

1.3.3 Grundfälle

Als Hilfsmittel für den Entwurf der Spannglieder in Einfeld- und Durchlaufträgern mit Torsion wurden die in den Bildern 46 bis 55 dargestellten Grundfälle entwickelt. Dabei kam die allgemeine Vorgehensregel zur Anwendung. Ein Reibungseinfluss wurde nicht berücksichtigt.

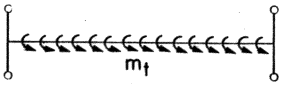
Analog zu den Beispielen in Abschnitt 1.2.2 werden zur vertikalen Hauptaxe symmetrische Hohlkastenquerschnitte vorausgesetzt, und es werden nur die Mittelebenen der Stege und Flanschen zeichnerisch dargestellt. Die Spannglieder befinden sich meist in den Stegen, so dass die unterschiedliche Höhenlage von Schwerpunkt und Schubmittelpunkt keine Rolle spielt. Eine Ausnahme bilden die Grundfälle 1 und 2, wo für eine Torsionsvorspannung auch der Fall von Spanngliedern in den Flanschen behandelt wird. Hier wird jedoch angenommen, dass der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, was für Entwurfszwecke zulässig erscheint. Ferner wurden wiederum die Näherungen $\sin\alpha \approx \tan\alpha = e'$ und $\cos\alpha \approx 1$ gesetzt und bei den gekrümmten Trägern die Torsionsmomente mit der für kleine Krümmung gültigen Näherungsformel aus den Biegemomenten berechnet.

Bei den Grundfällen mit Vierpunktlagerung, d.h. mit beidseitig torsionssteifer Auflagerung (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8), handelt es sich um einfach statisch unbestimmte Systeme. Zur Bildung eines Grundsystems kann am einen Trägerende eine torsionsweiche Lagerung eingeführt werden, oder es kann bei symmetrischer Belastung und Vorspannung ein Torsionsgelenk in Balkenmitte angenommen werden. Da die Torsionssteifigkeit zur Lastabtragung unerlässlich ist, kann bei sämtlichen Grundfällen die Torsion aus äusserer Belastung als Gleichgewichtstorsion bezeichnet werden.

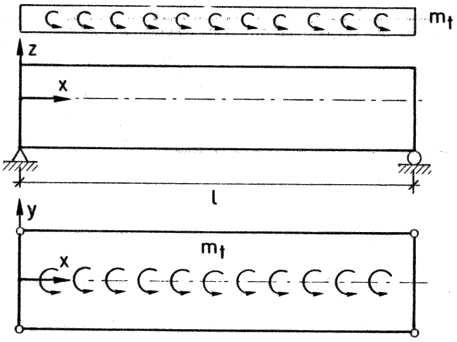
Die Grundfälle mit reiner Torsionsbelastung (1, 2) sowie diejenigen mit beidseitiger Verschiebung der Biege-Spannglieder (3, 4, 7) können als "rein" formtreu bezeichnet werden. Der Grundfall 7 mit ebenfalls beidseitiger Verschiebung der Biege-Spannglieder ist nahezu "rein" formtreu. Es werden bloss die Querkräfte gemäss dem 5. Satz nicht genau kompensiert. Die Grundfälle 5, 6, 8 und 9 mit einseitiger Verschiebung der Biege-Spannglieder können der Gruppe "möglichst" formtreu zugeordnet werden. Anhand dieser Grundfälle ist ersichtlich wie die Biege-Spannglieder verschoben werden müssen, damit der Torsion aus äusserer Belastung entgegengewirkt bzw. diese so weit wie möglich kompensiert werden kann.

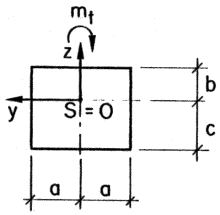
Bei den Grundfällen mit exzentrischer Belastung (3, 4, 5, 6) wurde jeweils - ähnlich wie für die geraden Kragträger in Abschnitt 1.2.2 - die Grenzexzentrizität angegeben, bis zu der die Torsion aus äusserer Belastung durch Verschieben der Biege-Spannglieder voll (beidseitiges Verschieben) oder teilweise (einseitiges Verschieben) kompensiert werden kann. Für grössere Exzentrizitäten als die Grenzexzentrizität können zusätzliche Torsions-Spannglieder sinnvoll sein. Für den vierpunktgelagerten gekrümmten Einfeldträger (Grundfall 7) wurde - ähnlich wie für den gekrümmten Kragträger in Abschnitt 1.2.2 - der Grenzwinkel ermittelt und dargestellt. Dieser gibt den Oeffnungswinkel an, bis zu dem die Torsion aus äusserer Belastung infolge Trägerkrümmung allein durch Verschieben der Biege-Spannglieder, also ohne zusätzlichen Aufwand, kompensiert werden kann. Bei den Grundfällen 8 und 9 wurde der Grenzwinkel in bezug auf denjenigen von Grundfall 7 angegeben.

GRUNDFALL 1:

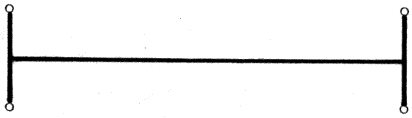


Gleichmässig verteilte Torsionsbelastung.
Reine Torsionsvorspannung



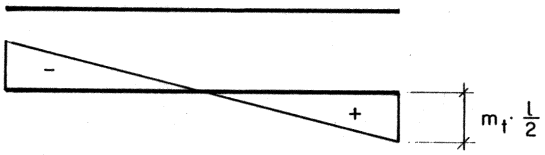


Statisches Modell :



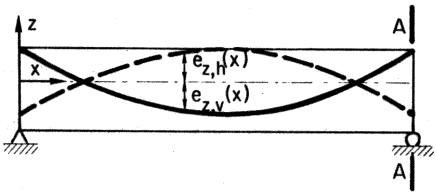
Schnittkräfte aus äusserer Belastung m_t :

$$M(m_t) = Q(m_t) = 0$$

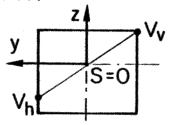


$$T(m_t) = m_t \cdot (x - \frac{l}{2})$$

1 a) Formtreue Vorspannung durch Torsions-Spannglieder in den Stegen (2. Satz)



A-A :

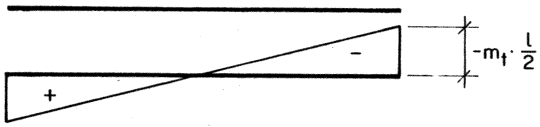


$$V_v = V_h = \frac{m_t \cdot l^2}{32 \cdot a \cdot b}$$

$$e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{8 \cdot b}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2) \pm b$$

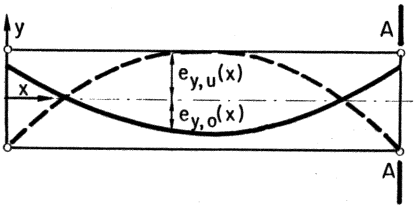
Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h) :

$$M(V) = Q(V) = 0$$

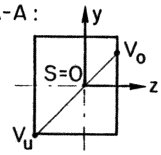


$$T(V) = m_t \cdot (\frac{l}{2} - x)$$

1 b) Formtreue Vorspannung durch Torsions-Spannglieder in den Flanschen (2. Satz)



A-A :

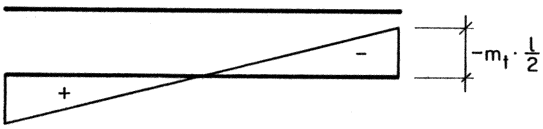


$$V_u = \frac{m_t \cdot l^2}{16 \cdot a \cdot (b+c)} \qquad V_o = \frac{m_t \cdot l^2 \cdot c}{16 \cdot a \cdot b \cdot (b+c)}$$

$$e_{y,o}(x) = -\frac{16 \cdot a \cdot b}{l^2 \cdot c} \cdot (\frac{l}{2} \cdot x - \frac{x^2}{2}) + \frac{a \cdot b}{c}$$

$$e_{y,u}(x) = +\frac{16 \cdot a}{l^2} \cdot (\frac{l}{2} \cdot x - \frac{x^2}{2}) - a$$

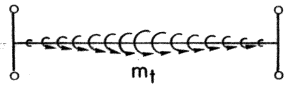
$$M(V) = Q(V) = 0$$



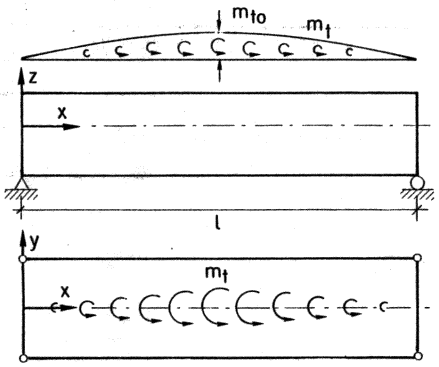
$$T(V) = m_t \cdot (\frac{l}{2} - x)$$

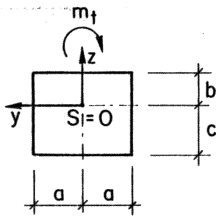
Bild 46: Grundfall 1

GRUNDFALL 2:



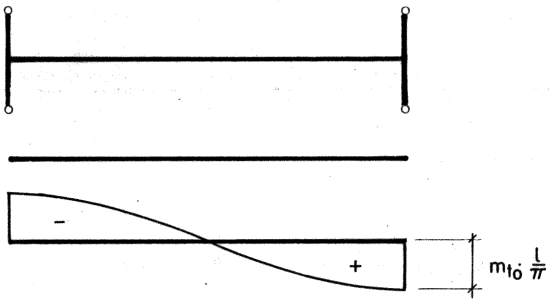
Sinusförmig verteilte Torsionsbelastung
Reine Torsionsvorspannung





$$m_t = m_{to} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \; [kNm/m]$$

Statisches Modell:

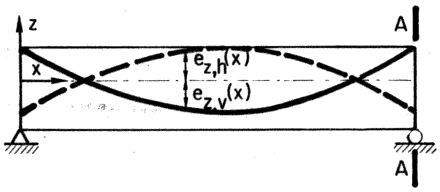


Schnittkräfte aus äusserer Belastung m_t:

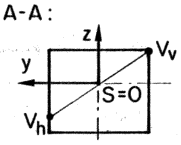
$$M(m_t) = Q(m_t) = 0$$

$$T(m_t) = -m_{to} \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$$

2a) Formtreue Vorspannung durch Torsions-Spannglieder in den Stegen (2. Satz)

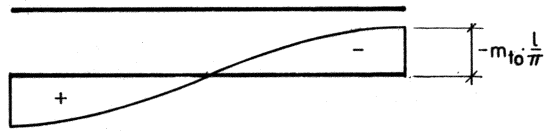


A-A:



$$V_v = V_h = \frac{m_{to} \cdot l^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot b}$$

$$e_{z,v,h}(x) = \mp 2 \cdot b \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \pm b$$

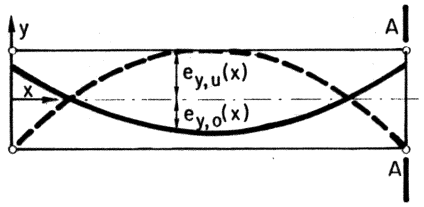


Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h):

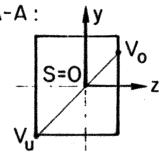
$$M(V) = Q(V) = 0$$

$$T(V) = m_{to} \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$$

2b) Formtreue Vorspannung durch Torsions-Spannglieder in den Flanschen (2. Satz)



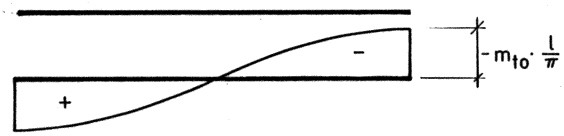
A-A:



$$V_u = \frac{m_{to} \cdot l^2}{2 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot (b+c)} \qquad V_o = \frac{m_{to} \cdot l^2 \cdot c}{2 \cdot \pi^2 \cdot a \cdot b \cdot (b+c)}$$

$$e_{y,o}(x) = -\frac{2 \cdot a \cdot b}{c} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} + \frac{a \cdot b}{c}$$

$$e_{y,u}(x) = 2 \cdot a \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} - a$$

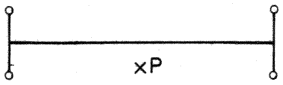


$$M(V) = Q(V) = 0$$

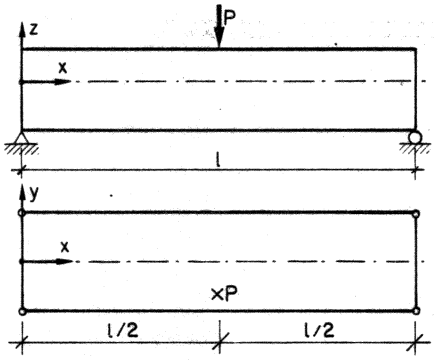
$$T(V) = m_{to} \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$$

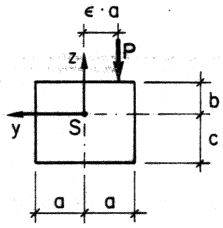
Bild 47: Grundfall 2

GRUNDFALL 3:

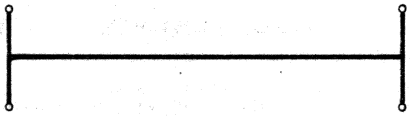


Exzentrische Einzellast P
Beidseitiges Verschieben der
Biege-Spannglieder

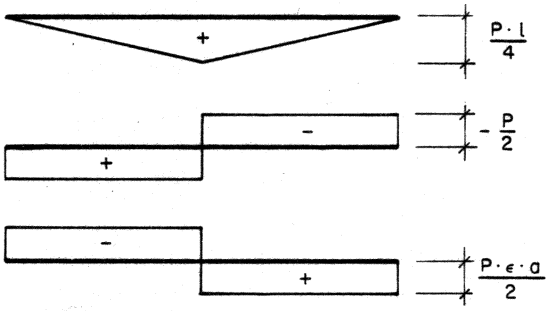




Statisches Modell:



Schnittkräfte aus äusserer Belastung $P\,(0 \le x \le \frac{l}{2})$:

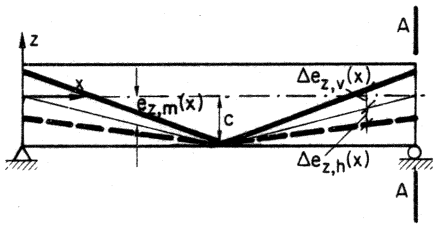


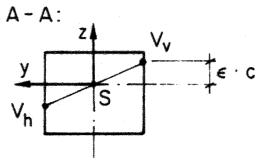
$M(p) = \frac{P}{2} \cdot x$

$Q(p) = \frac{P}{2}$

$T(p) = -\frac{P \cdot \epsilon \cdot a}{2}$

3a) $\epsilon \le \epsilon_{Gr} = \frac{b}{c}$: Formtreue Vorspannung durch Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)

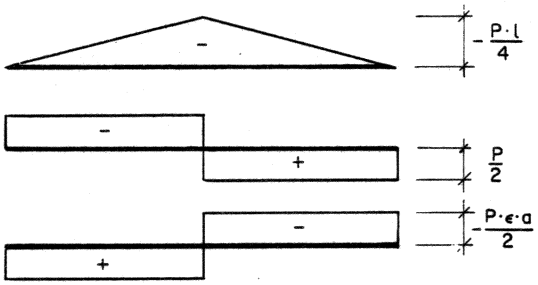




$V_v = V_h = \frac{P \cdot l}{8 \cdot c}$ (pro Steg)

$e_{z,m}(x) = -\frac{2 \cdot c}{l} \cdot x$

Schnittkräfte aus Vorspannung V_v, V_h $(0 \le x \le \frac{l}{2})$:



$M(V) = -\frac{P}{2} \cdot x$

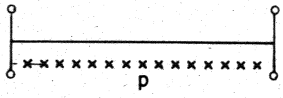
$Q(V) = -\frac{P}{2}$ (4. Satz)

$T(V) = +\frac{P \cdot \epsilon \cdot a}{2}$; $\Delta e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{2 \cdot \epsilon \cdot c}{l} \cdot x \pm \epsilon \cdot c$

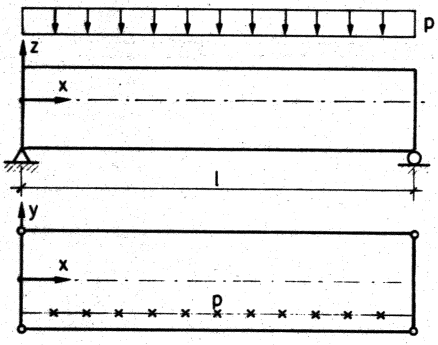
3b) $\epsilon > \epsilon_{Gr} = \frac{b}{c}$: Für formtreue Vorspannung sind zusätzliche Torsions-Spannglieder erforderlich

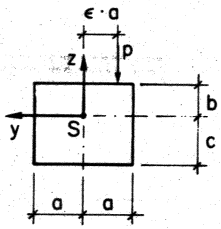
Bild 48: Grundfall 3

GRUNDFALL 4:

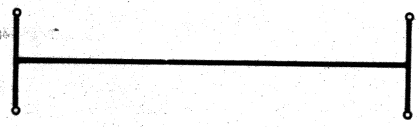


Exzentrische Gleichlast p
Beidseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder

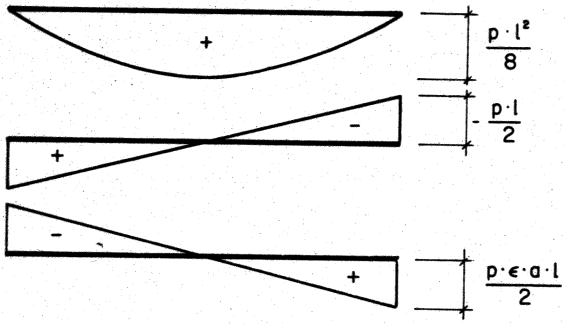




Statisches Modell:



Schnittkräfte aus äusserer Belastung p:

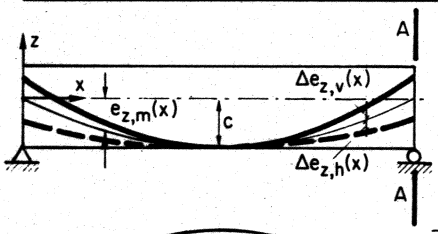


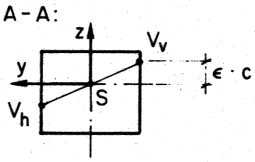
$M(p) = \frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x)$

$Q(p) = p \cdot (\frac{l}{2} - x)$

$T(p) = p \cdot \epsilon \cdot a \cdot (x - \frac{l}{2})$

4a) $\epsilon \leq \epsilon_{Gr} = \frac{b}{c}$: Formtreue Vorspannung durch Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)

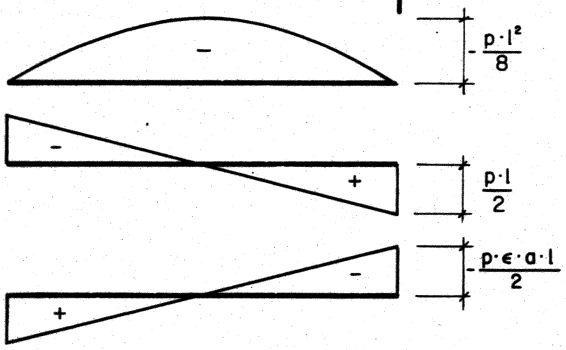




$V_v = V_h = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot c}$ (pro Steg)

$e_{z,m}(x) = \frac{4 \cdot c}{l} \cdot (\frac{x^2}{l} - x)$

Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h):



$M(V) = -\frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x)$

$Q(V) = p \cdot (x - \frac{l}{2})$ (4. Satz)

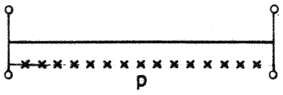
$T(V) = p \cdot \epsilon \cdot a \cdot (\frac{l}{2} - x)$

$\Delta e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{4 \cdot \epsilon \cdot c}{l^2} \cdot (l \cdot x - x^2) \pm \epsilon \cdot c$

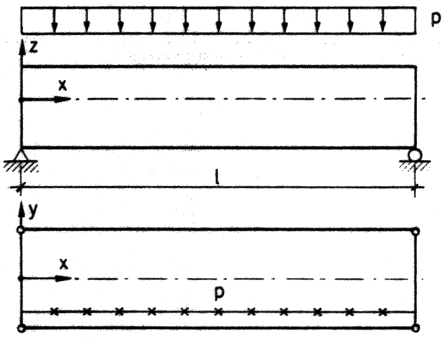
4b) $\epsilon > \epsilon_{Gr} = \frac{b}{c}$: Für formtreue Vorspannung sind zusätzliche Torsions-Spannglieder erforderlich

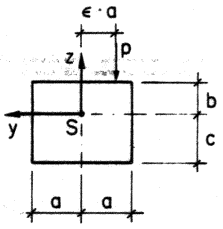
Bild 49: Grundfall 4

GRUNDFALL 5:

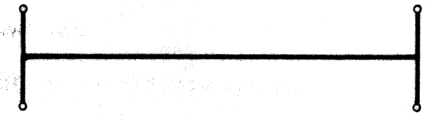


Exzentrische Gleichlast p
Einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder

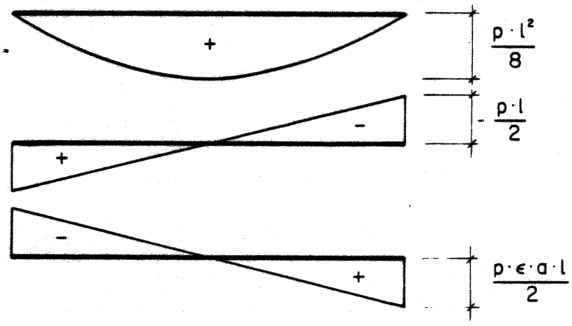




Statisches Modell:



Schnittkräfte aus äusserer Belastung p:

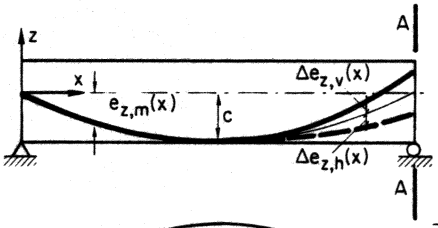


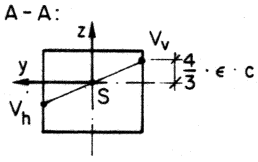
$M(p) = \frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x)$

$Q(p) = p \cdot (\frac{l}{2} - x)$

$T(p) = p \cdot \epsilon \cdot a \cdot (x - \frac{l}{2})$

5a) $\epsilon \leq \epsilon_{Gr} = \frac{3 \cdot b}{4 \cdot c}$: Maximale Kompensation von T(p) durch einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)

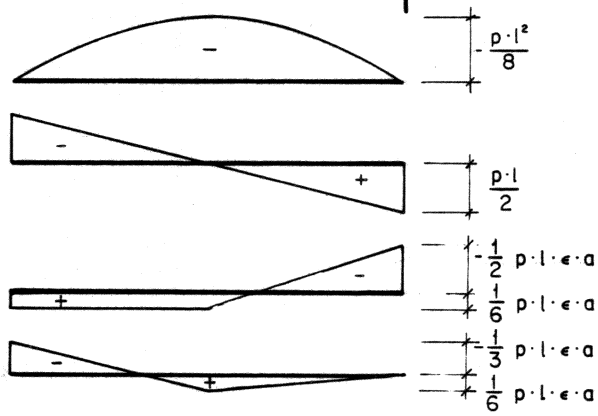




$V_v = V_h = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot c}$ (pro Steg)

$e_{z,m}(x) = \frac{4 \cdot c}{l} \cdot (\frac{x^2}{l} - x)$

Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h):



$M(V) = -\frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x)$

$Q(V) = p \cdot (x - \frac{l}{2})$ (4. Satz)

$T(V) = \frac{p \cdot \epsilon \cdot a}{6} \cdot (5l - 8x)$

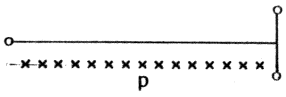
$T(V) = +\frac{1}{6} \cdot p \cdot \epsilon \cdot a \cdot l$

T_R

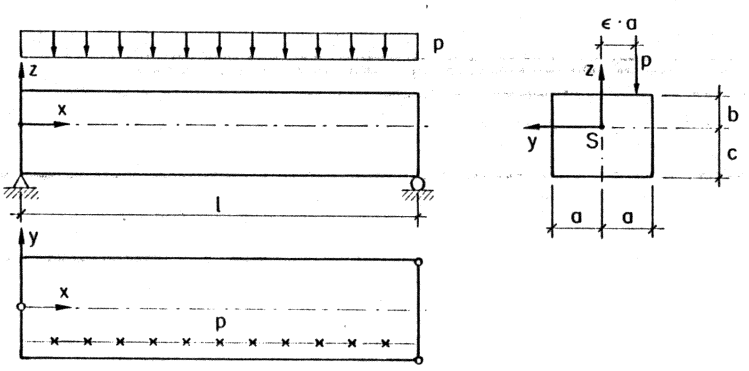
$\Delta e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{16 \cdot \epsilon \cdot c}{3 \cdot l^2} \cdot (l \cdot x - x^2) \pm \frac{4 \cdot \epsilon \cdot c}{3}$

Bild 50: Grundfall 5

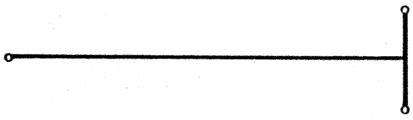
GRUNDFALL 6:



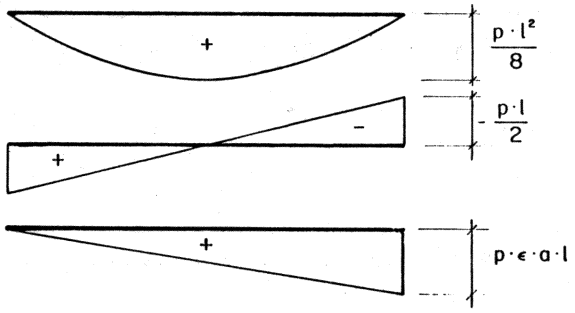
Exzentrische Gleichlast p
Einseitiges Verschieben der
Biege-Spannglieder



Statisches Modell:



Schnittkräfte aus äusserer Belastung p:

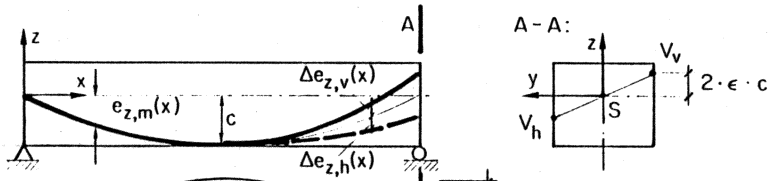


$M(p) = \frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x)$

$Q(p) = p \cdot (\frac{l}{2} - x)$

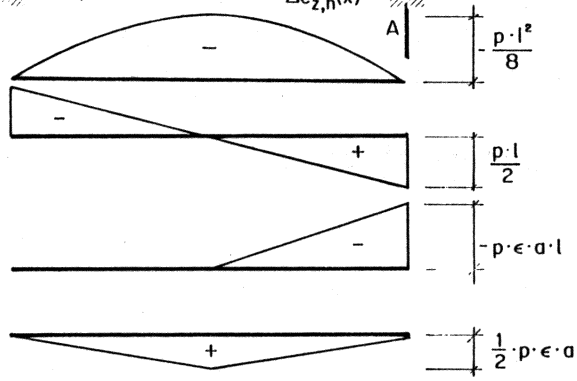
$T(p) = p \cdot \epsilon \cdot a \cdot x$

6a) $\epsilon \leq \epsilon_{Gr} = \frac{b}{2 \cdot c}$: Maximale Kompensation von T(p) durch einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)



$V_v = V_h = \frac{p \cdot l^2}{16 \cdot c}$ (pro Steg)

$e_{z,m}(x) = \frac{4 \cdot c}{l} \cdot (\frac{x^2}{l} - x)$



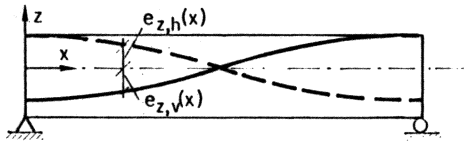
Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h):

$M(V) = -\frac{p \cdot x}{2} \cdot (l - x)$

$Q(V) = p \cdot (x - \frac{l}{2})$ (4. Satz)

$T(V) = p \cdot \epsilon \cdot a \cdot (l - 2x)$; $\Delta e_{z,v,h}(x) = \mp \frac{8 \cdot \epsilon \cdot c}{l^2} (lx - x^2) \pm 2\epsilon c$

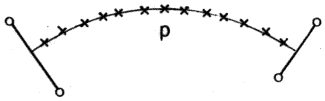
T_R



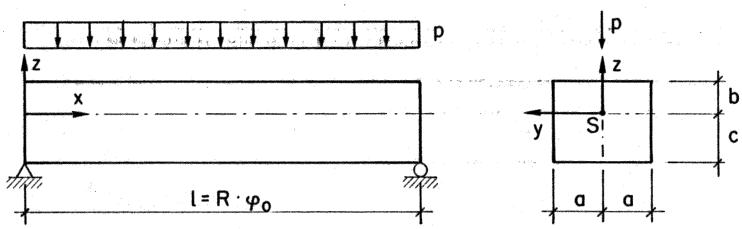
Für formtreue Vorspannung müssen zusätzlich solche Spannglieder eingelegt werden.

Bild 51: Grundfall 6

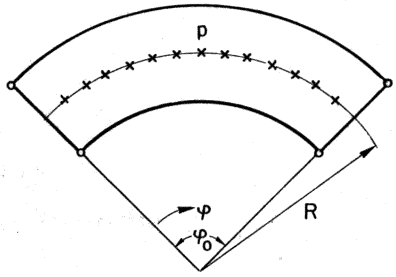
GRUNDFALL 7:

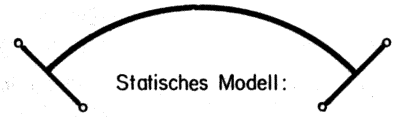


Zentrische Gleichlast
Beidseitiges Verschieben
der Biege-Spannglieder

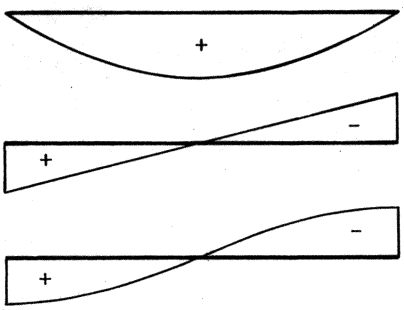


$0 \leq \varphi_0 \leq 90°$





Schnittkräfte aus äusserer Belastung p :

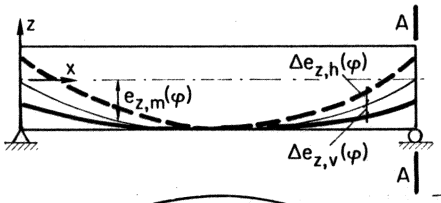


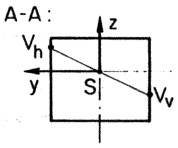
$p \cdot R^2 \cdot \dfrac{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ $\quad M(p) = p \cdot R^2 \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$

$-p \cdot R \cdot \frac{\varphi_0}{2}$ $\quad Q(p) = p \cdot R \cdot (\frac{\varphi_0}{2} - \varphi)$

$p \cdot R^2 \cdot (\frac{\varphi_0}{2} - \tan\frac{\varphi_0}{2})$ $\quad T(p) = p \cdot R^2 \cdot \left[\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos\varphi + \varphi - \sin\varphi - \frac{\varphi_0}{2}\right]$

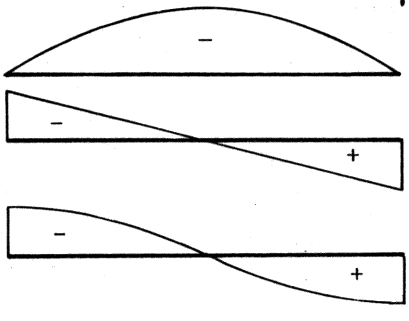
7 a) $\varphi_0 \leq \varphi_{Gr7}$: Formtreue Vorspannung durch Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)





$V_v = V_h = \dfrac{p \cdot R^2}{2 \cdot c} \cdot \dfrac{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$

$e_{z,m}(\varphi) = \dfrac{c \cdot \cos\frac{\varphi_0}{2}}{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}} \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$



Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h):

$p \cdot R^2 \cdot \dfrac{\cos\frac{\varphi_0}{2} - 1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ $\quad M(V) = -M(p)$

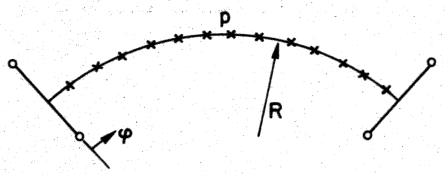
$p \cdot R \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2}$ $\quad Q(V) = \dfrac{dM(V)}{R \cdot d\varphi} \simeq Q(p)$ (5. Satz)

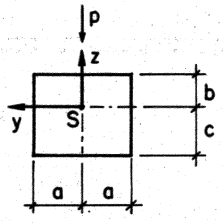
$p \cdot R^2 \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi_0}{2})$ $\quad T(V) = -T(p)$

7b) $\varphi_0 > \varphi_{Gr7}$: Für formtreue Vorspannung sind zusätzliche Torsions-Spannglieder erforderlich

Bild 52: Grundfall 7

GRENZWINKEL zu GRUNDFALL 7: φ_{Gr7}





Biege-Spannglieder:

$$e_{z,m}(\varphi) = \frac{c\cdot\cos\frac{\varphi_0}{2}}{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}\cdot\left(\tan\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\varphi - 1 + \cos\varphi\right)$$

Verschieben der Biege-Spannglieder:

$$\Delta e_{z,v,h}(\varphi) = \mp\frac{R\cdot c\cdot\cos\frac{\varphi_0}{2}}{a\cdot\left(1-\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)}\cdot\left(\cos\varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \tan\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\varphi - \frac{\varphi_0}{2}\cdot\varphi - \cos\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0^2}{8} - \tan\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Bedingung für Grenzwinkel:

$$\Delta e_{z,h}(\varphi=0,\varphi=\varphi_0) = b = \frac{R\cdot c\cdot\cos\frac{\varphi_0}{2}}{a\cdot\left(1-\cos\frac{\varphi_0}{2}\right)}\cdot\left(1-\cos\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0^2}{8} - \tan\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

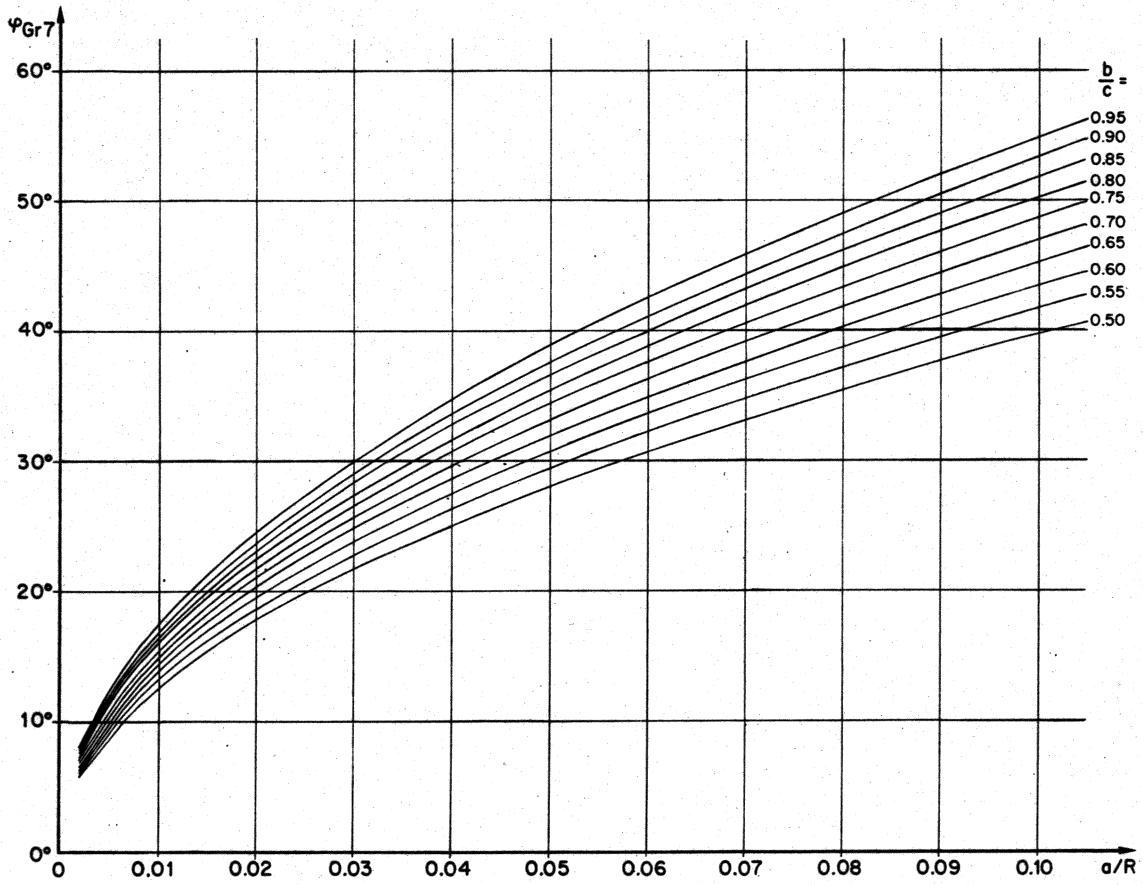
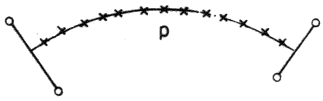
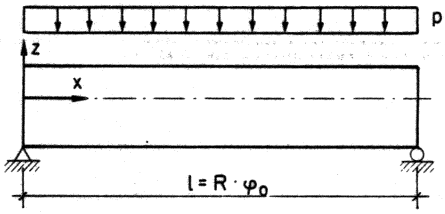


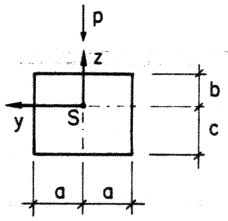
Bild 53: Grenzwinkel zu Grundfall 7

GRUNDFALL 8:

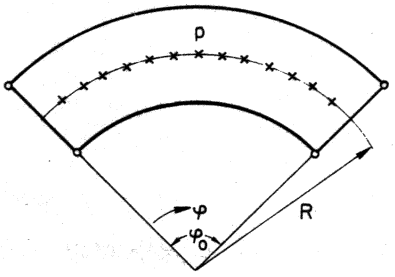


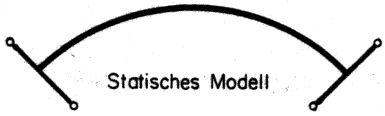
Zentrische Gleichlast
Einseitiges Verschieben
der Biege-Spannglieder



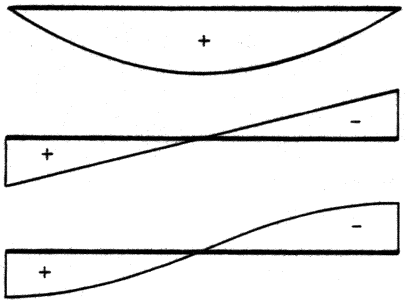


$0 \le \varphi_0 \le 90°$





Schnittkräfte aus äusserer Belastung p :

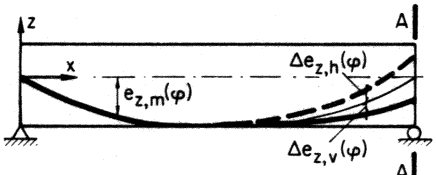


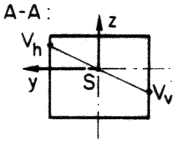
$p \cdot R^2 \cdot \dfrac{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ $\quad M(p) = p \cdot R^2 \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$

$-p \cdot R \cdot \frac{\varphi_0}{2}$ $\quad Q(p) = p \cdot R \cdot (\frac{\varphi_0}{2} - \varphi)$

$p \cdot R^2 \cdot (\frac{\varphi_0}{2} - \tan\frac{\varphi_0}{2})$ $\quad T(p) = p \cdot R^2 \cdot \left[\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos\varphi + \varphi - \sin\varphi - \frac{\varphi_0}{2}\right]$

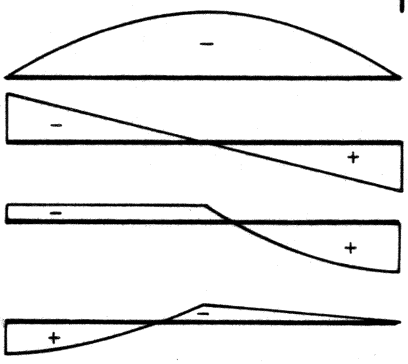
$\varphi_0 \le \varphi_{Gr8} = 0.68\,\varphi_{Gr7}$: Maximale Kompensation von T(p) durch einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)





$V_v = V_h = \dfrac{p \cdot R^2}{2 \cdot c} \cdot \dfrac{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$

$e_{z,m}(\varphi) = \dfrac{c \cdot \cos\frac{\varphi_0}{2}}{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}} \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$



$p \cdot R^2 \cdot \dfrac{\cos\frac{\varphi_0}{2} - 1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ $\quad$ **Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h);**

$M(V) = -M(p)$

$p \cdot R \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2}$ $\quad Q(V) = \dfrac{dM(V)}{R\,d\varphi} \simeq Q(p)$ (5. Satz)

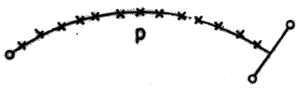
$f(p, R, \varphi_0)$ $\quad T(V) = f(p, R, \varphi, \varphi)$;

$\Delta e_{z,v,h}(\varphi) = f(R, c, a, \varphi_0, \varphi)$

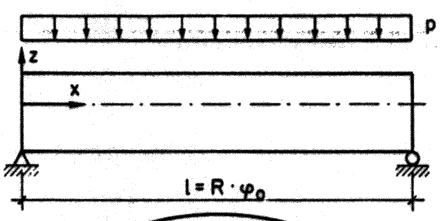
$f(p, R, \varphi_0)$ $\quad T_R$

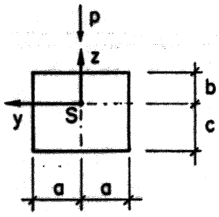
Bild 54: Grundfall 8

GRUNDFALL 9 :

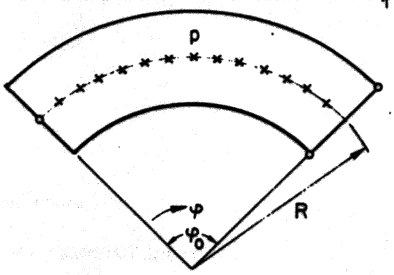


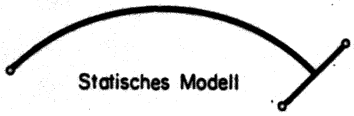
Zentrische Gleichlast
Einseitiges Verschieben
der Biege-Spannglieder





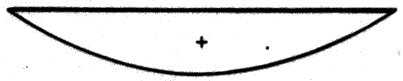
$0 \le \varphi_0 \le 90°$



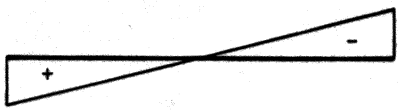


Statisches Modell

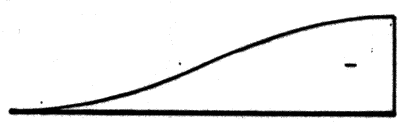
Schnittkräfte aus äusserer Belastung p :



$p \cdot R^2 \cdot \dfrac{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ $\qquad M(p) = p \cdot R^2 \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$

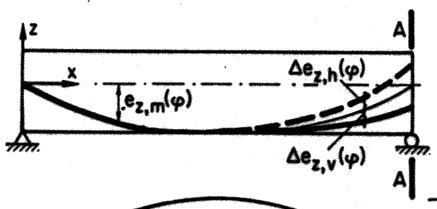


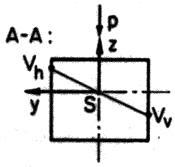
$-p \cdot R \cdot (\varphi_0 - \tan\frac{\varphi_0}{2})$ $\qquad Q(p) = p \cdot R \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} - \varphi)$



$p \cdot R^2 \cdot (\varphi_0 - 2\tan\frac{\varphi_0}{2})$ $\qquad T(p) = p \cdot R^2 \cdot \left[\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot (\cos\varphi - 1) + \varphi - \sin\varphi\right]$

$\varphi_0 \le \varphi_{Gr9} = \frac{1}{2}\varphi_{Gr7}$: Maximale Kompensation von T(p) durch einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder (2. Satz)

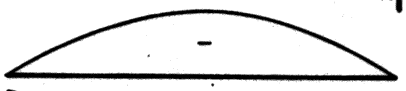




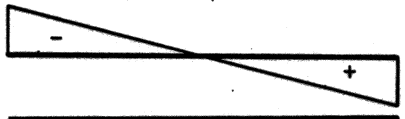
$$V_v = V_h = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot c} \cdot \frac{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$$

$$e_{z,m}(\varphi) = \frac{c \cdot \cos\frac{\varphi_0}{2}}{1-\cos\frac{\varphi_0}{2}} \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin\varphi - 1 + \cos\varphi)$$

Schnittkräfte aus Vorspannung (V_v, V_h):



$p \cdot R^2 \cdot \dfrac{\cos\frac{\varphi_0}{2} - 1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}}$ $\qquad M(V) = -M(p)$



$p \cdot R \cdot \tan\frac{\varphi_0}{2}$ $\qquad Q(V) = \dfrac{dM(V)}{R \cdot d\varphi} \cong Q(p)$ (5. Satz)

$p \cdot R^2 \cdot (\varphi_0 - 2\tan\frac{\varphi_0}{2})$ $\qquad T(V) = 2 \cdot T(V)$ von GF 7

$\Delta e_{z,v,h}(\varphi) = 2\Delta e_{z,v,h}(\varphi)$ von GF 7

$p \cdot R^2 \cdot (\tan\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\varphi_0}{2})$ $\qquad T_R$

Bild 55 : Grundfall 9

1.3.4 Praktische Beispiele

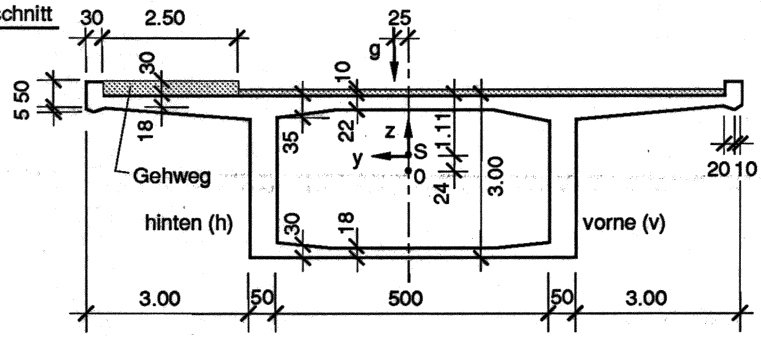
Nachfolgend wird der Entwurf der Spannglieder in exzentrisch belasteten, gekrümmten und schief gelagerten Stabtragwerken an einigen praktischen Beispielen gezeigt. Dabei wurden die allgemeine Vorgehensregel gemäss Abschnitt 1.3.2 und die Erkenntnisse aus den Grundfällen angewendet.

Folgendes ist zu beachten:

- Beim Beispiel a) wurde für Biegung eine volle Vorspannung für Eigengewicht g mit $\sigma_{zul} = 1\ N/mm^2$ (Zug) angestrebt. Bei allen anderen Beispielen wurde als die zu kompensierende äussere Belastung das Eigengewicht g angenommen.
- Die Lage der beweglichen Anker bzw. die Spannrichtung wurde jeweils durch Pfeile angegeben.
- Die Reibung der Spannglieder in den Hüllrohren wurde überall berücksichtigt, und zwar für einen Reibungskoeffizienten $\mu = 0.20$ und einen ungewollten Umlenkwinkel $\Delta\alpha = 0.006/m'$.
- Die angegebenen Spannkräfte gelten für den Zustand nach Schwinden und Kriechen des Betons und Relaxation des Stahles. Die anfänglich aufzubringenden Spannkräfte wären - je nach den zu erwartenden Verlusten - etwa 10 bis 15% höher anzusetzen.
- Sämtliche Schnittkräfte wurden mit dem Programm STATIK ermittelt [5].
- Die Querkräfte aus äusseren Lasten und aus Vorspannung wurden aus Platzgründen nicht angegeben.
- Bei den Darstellungen der Längsschnitte der Träger wurden jeweils - anders als bei den Beispielen in Abschnitt 1.2.2 und bei den Grundfällen - die Trägeroberkante und die Trägerunterkante dargestellt und etwa in den Viertels- oder Fünftelspunkten die Ordinaten der Spannglieder ab Trägeroberkante eingetragen.

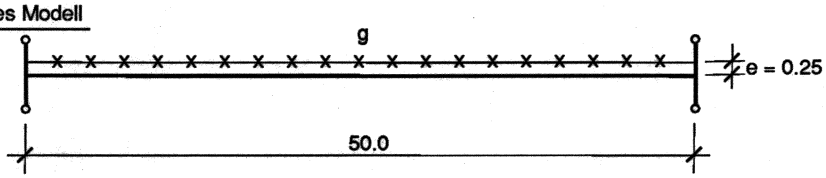
a) Exzentrisch belasteter Einfeldträger mit symmetrischem Querschnitt

Querschnitt



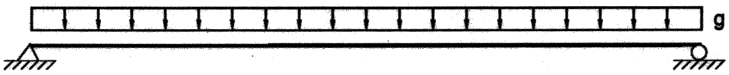
symmetrischer Kastenquerschnitt mit exzentrischer Belastung g (infolge "toter" Masse beim Gehweg)

Statisches Modell

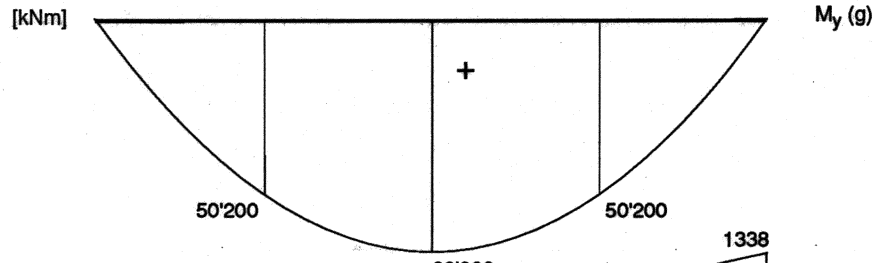


Einfeldträger mit exzentrischer Belastung g (Grenzexzentrizität nach Grundfall 4 : e_{Gr} = 1.40)

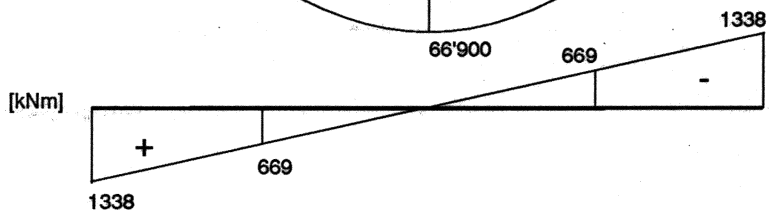
Lastfall 1



Eigengewicht g = 214 kN/m'



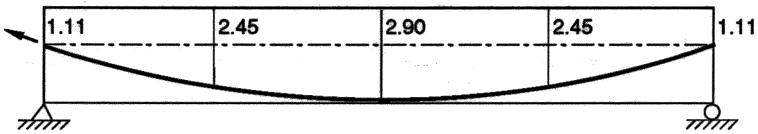
M_y (g)



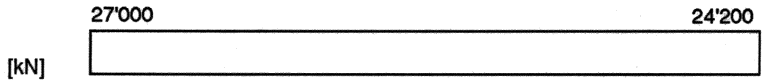
T (g)

Gleichgewichtstorsion

Lastfall 2

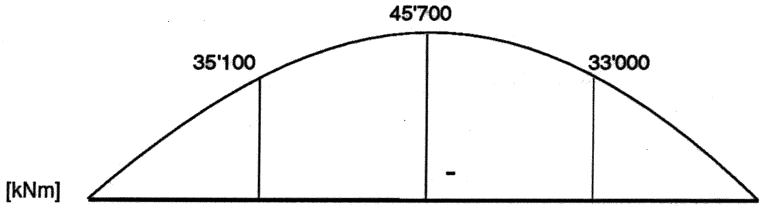


Volle Vorspannung für Biegung infolge Eigengewicht (σ^+_{zul} = 1 N/mm^2) am Grundsystem mit Torsionsgelenk in Trägermitte

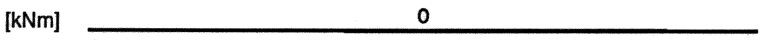


$V = V_v + V_h$

$\frac{V}{F}$ und $\sigma^+_{zul.}$ sind nicht mehr "in Reserve"



M_y (V)

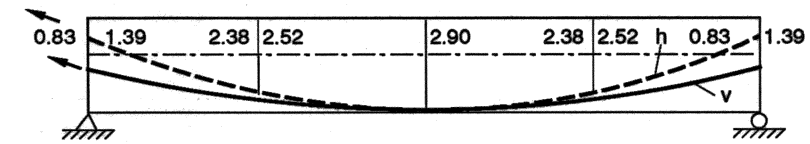


M_z (V)

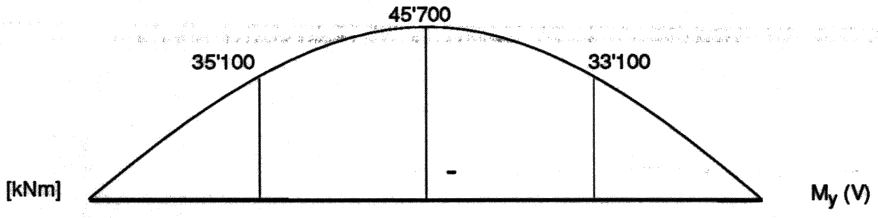
Keine Biegung um vertikale Axe

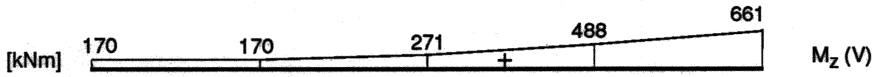
T (V)

Lastfall 3

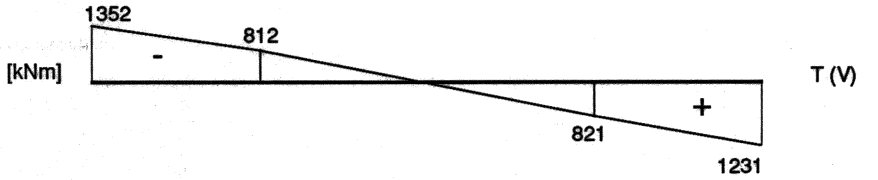


Beidseitiges Verschieben der Biege-Spanngliederr nach Grundfall 4

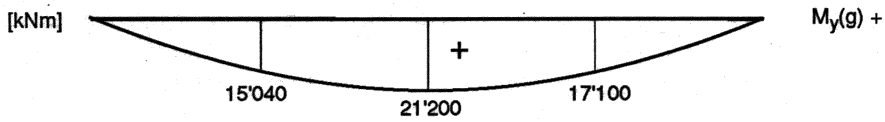




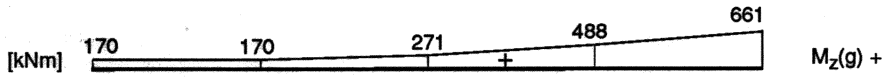
Biegung um vertikale Axe wegen unterschiedlichen Spanngliedneigungen und Reibungsverlusten



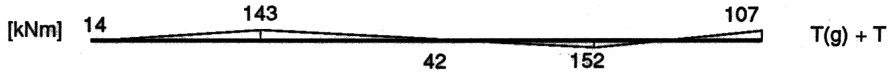
Superposition Lastfälle 1 und 3



Restliches Biegemoment M_y



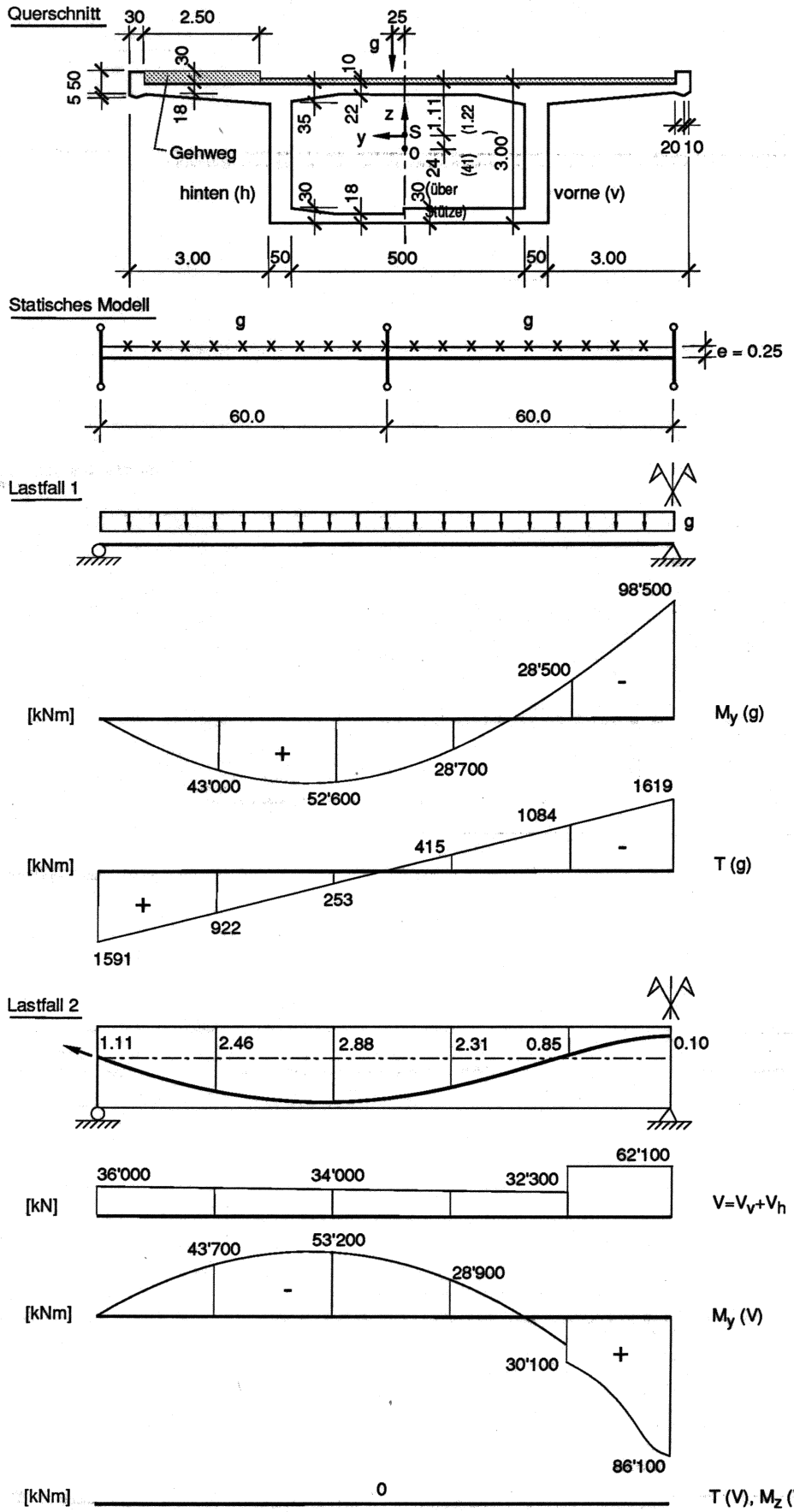
Restliches Biegemoment M_z



Restliches Torsionsmoment

Bild 56: Praktisches Beispiel a): Exzentrisch belasteter Einfeldträger mit symmetrischem Querschnitt

b) Exzentrisch belasteter Zweifeldträger mit symmetrischem Querschnitt



symmetrischer Kastenquerschnitt mit exzentrischer Belastung g (infolge "toter" Masse beim Gehweg)

Zweifeldträger mit exzentrischer Belastung g (Grenzexzentrizität nach Grundfall 4 : e_{Gr} = 1.40)

Eigengewicht g = 214 kN/m'

Gleichgewichtstorsion

Möglichst formtreue Vorspannung für Biegung am wirklichen System, Spannglieder über Zwischenstütze überlappend

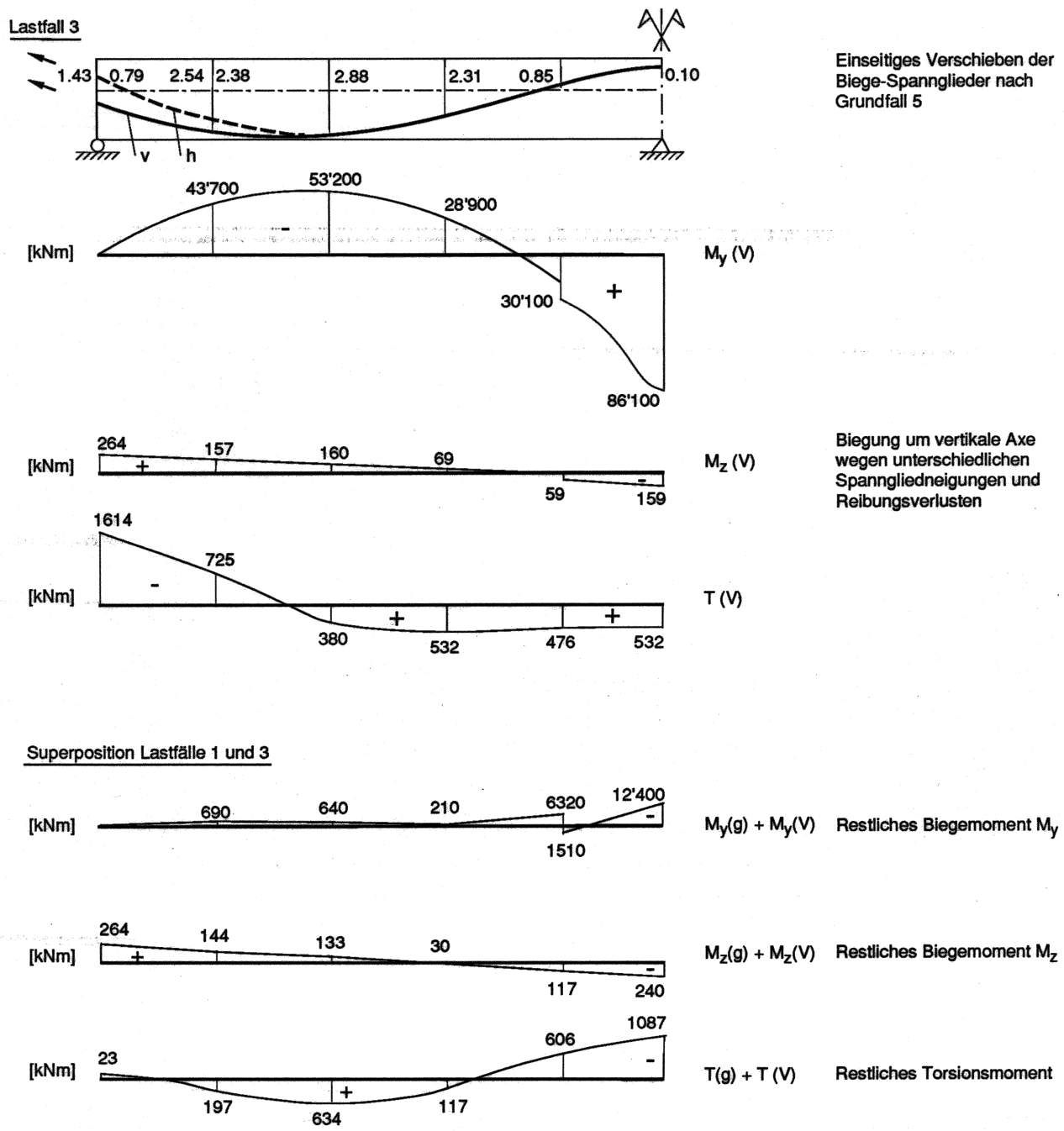
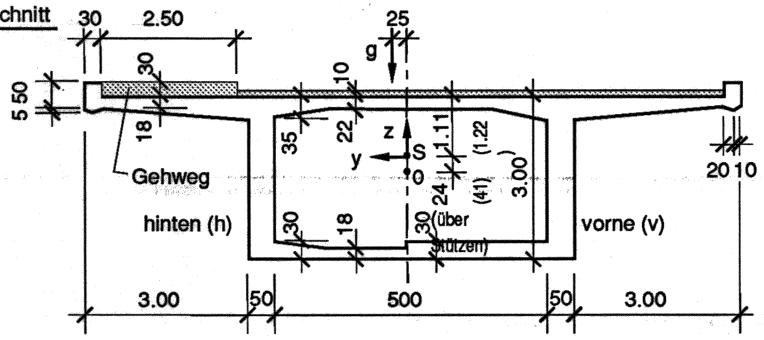


Bild 57: Praktisches Beispiel b): Exzentrisch belasteter Zweifeldträger mit symmetrischem Querschnitt

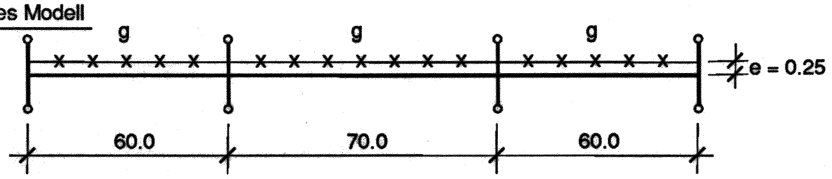
c) Exzentrisch belasteter Dreifeldträger mit symmetrischem Querschnitt

Querschnitt



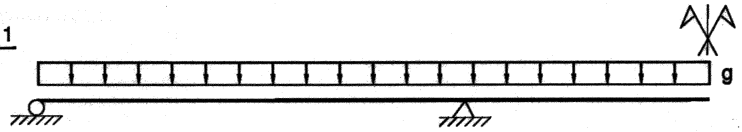
symmetrischer Kastenquerschnitt mit exzentrischer Belastung g (infolge "toter" Masse beim Gehweg)

Statisches Modell

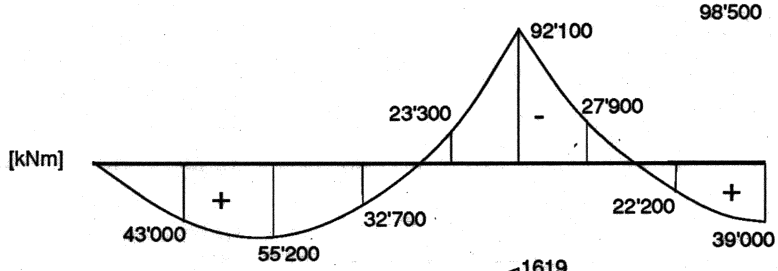


Dreifeldträger mit exzentrischer Belastung g

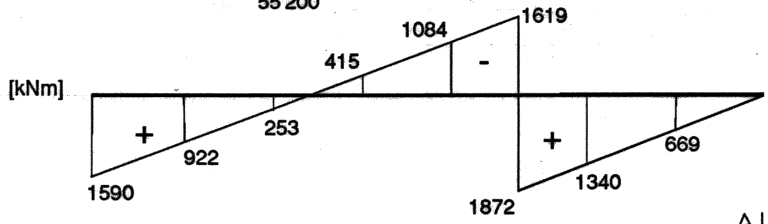
Lastfall 1



Eigengewicht g = 214 kN/m'



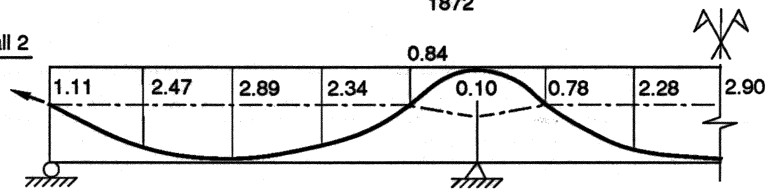
M_y (g)



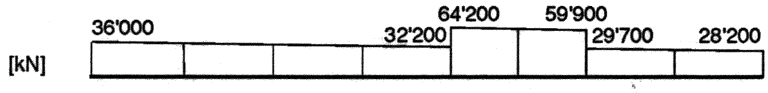
T (g)

Gleichgewichtstorsion

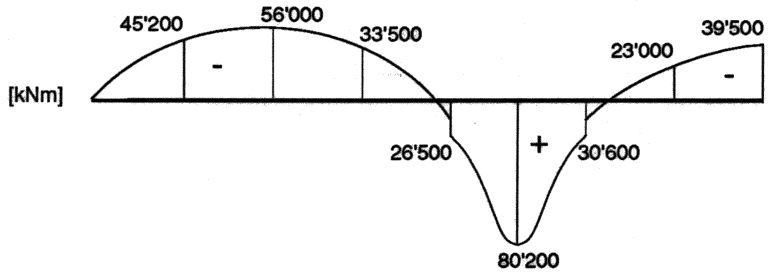
Lastfall 2



Möglichst formtreue Vorspannung für Biegung am wirklichen System, Spannglieder über Zwischenstützen überlappend



$V = V_v + V_h$



M_y (V)

T (V), M_z (V)

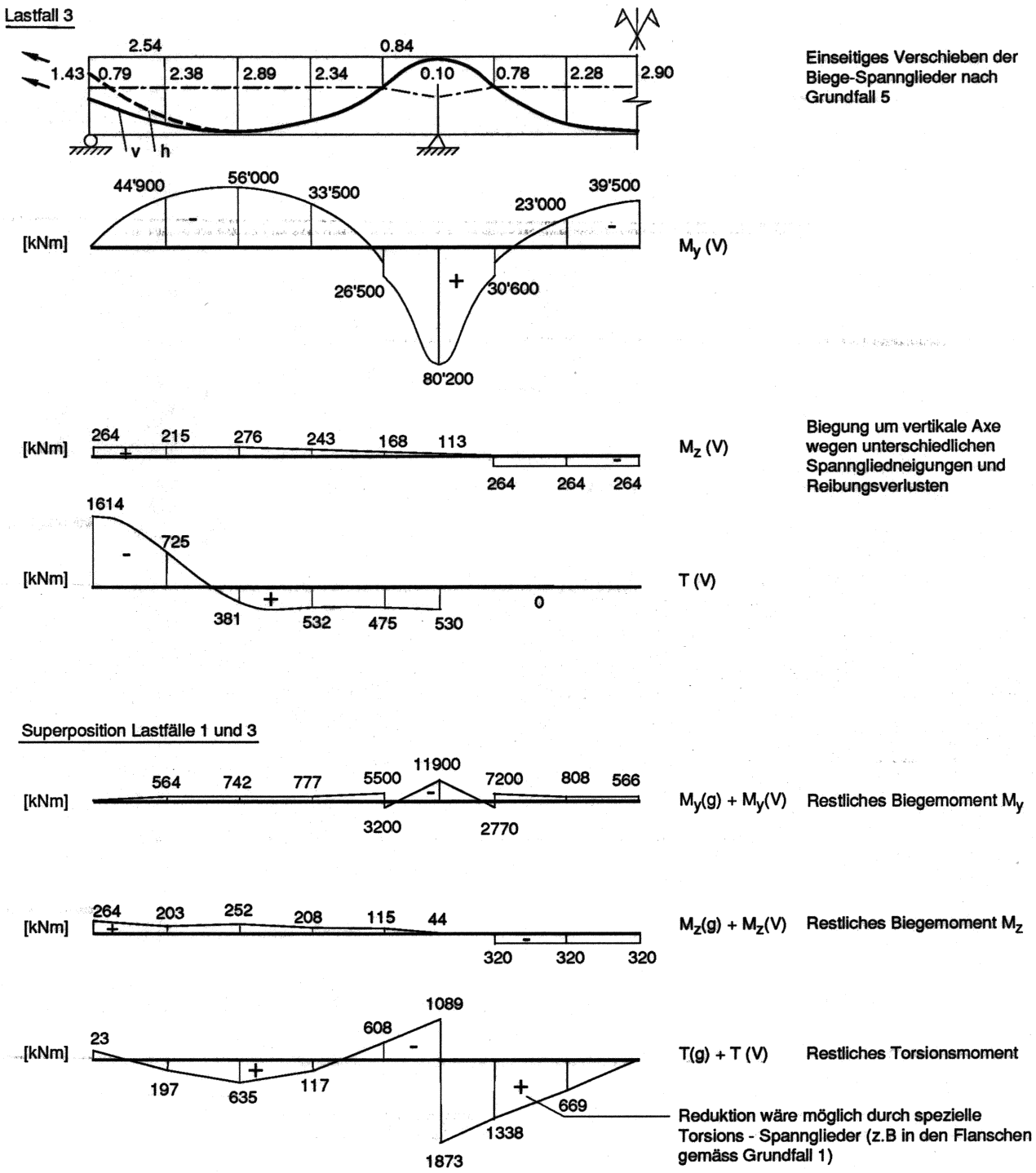
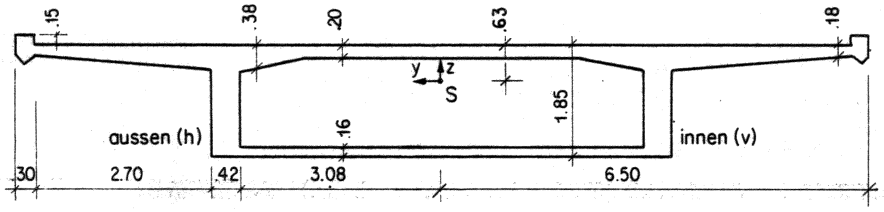


Bild 58: Praktisches Beispiel c): Exzentrisch belasteter Dreifeldträger mit symmetrischem Querschnitt

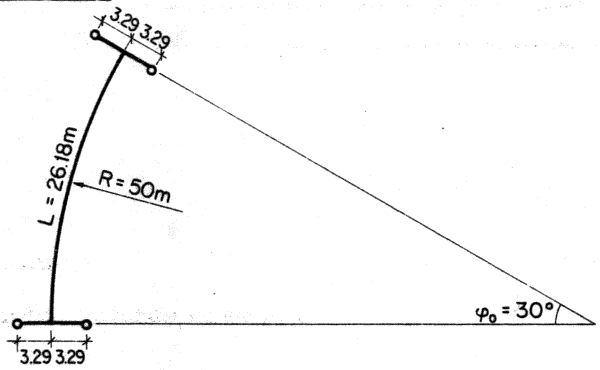
d) Gekrümmter Einfeldträger

Querschnitt



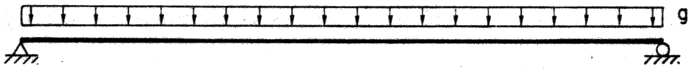
Kastenquerschnitt konstant über ganze Länge

Statisches Modell

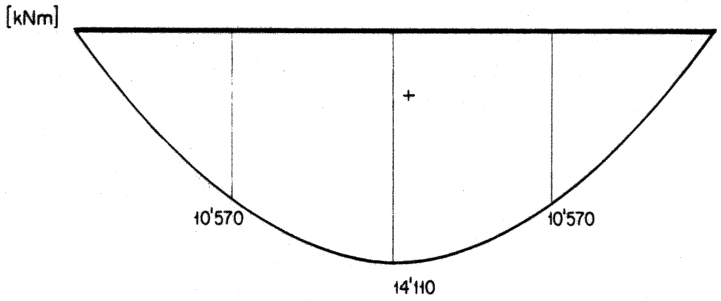


Träger kreisförmig gekrümmt,
Krümmungsradius R = 50 m,
Oeffnungswinkel 30°
(Grenzwinkel nach Grundfall 7:
$\varphi_{Gr} = 32°$)

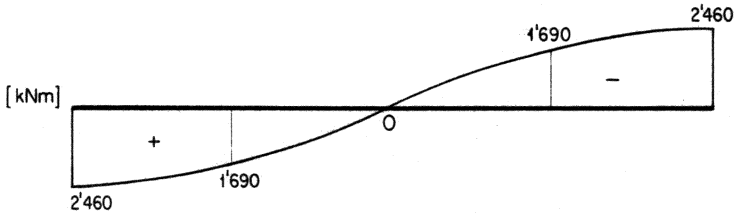
Lastfall 1



Eigengewicht g = 168 kN/m'



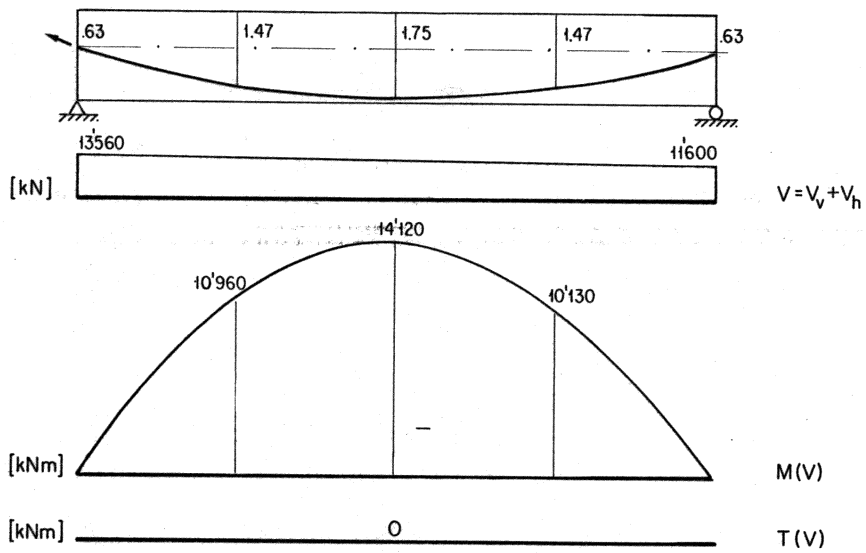
M (g)



T (g)

Gleichgewichtstorsion

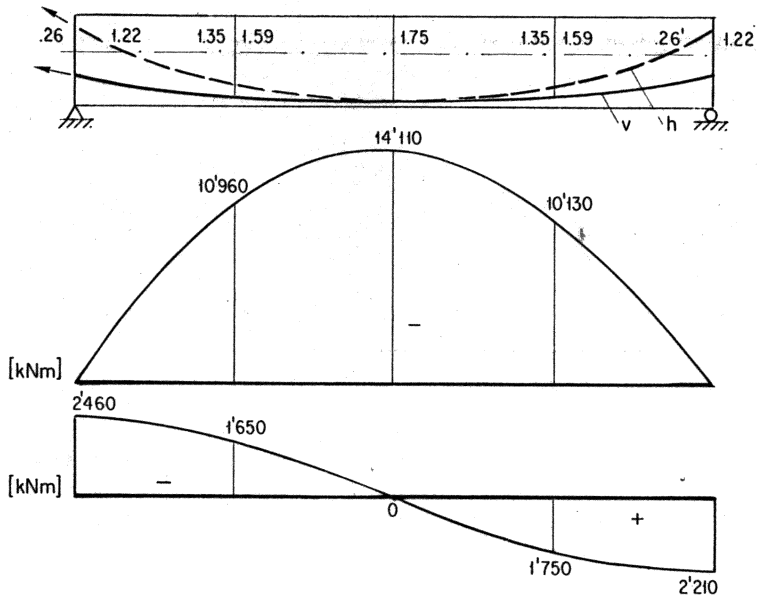
Lastfall 2



Formtreue Vorspannung für Biegung am Grundsystem mit Torsionsgelenk in Trägermitte

Keine Gleichgewichtstorsion (3. Satz)

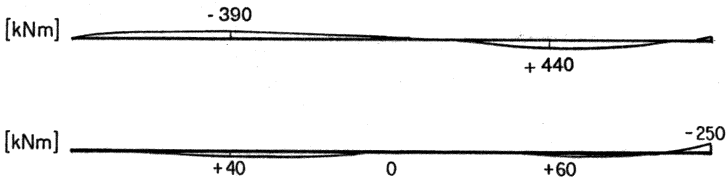
Lastfall 3



Beidseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder nach Grundfall 7

Schnittkraftverteilung unsymmetrisch infolge Reibung → es entstehen geringe Zwängungsschnittkräfte

Superposition Lastfälle 1 und 3



Restliches Biegemoment

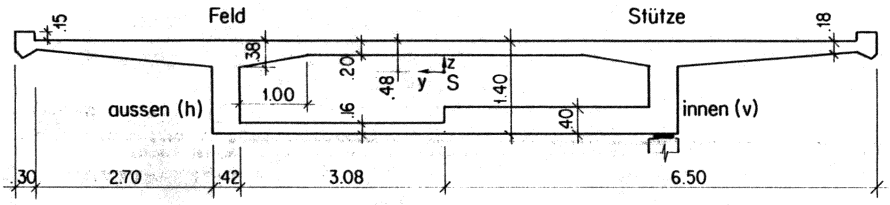
Restliches Torsionsmoment

Sofern die Spannglieder an beiden Brückenenden gespannt würden (symmetrische Verhältnisse), könnte die Torsion aus Eigengewicht auch am rechten Trägerende praktisch vollständig kompensiert werden.

Bild 59: Praktisches Beispiel d): Gekrümmter Einfeldträger

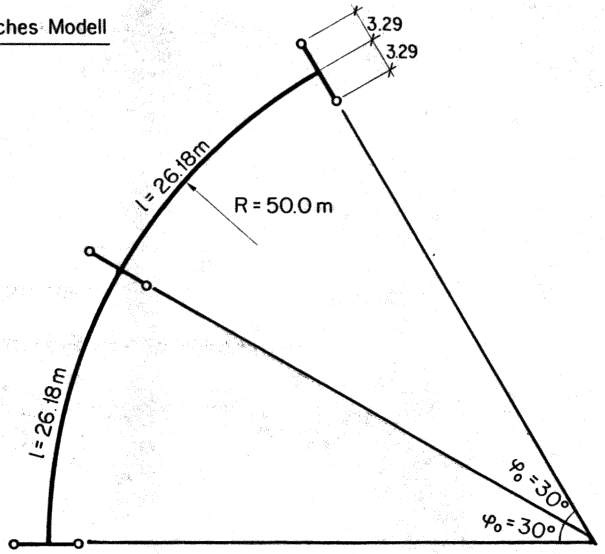
e) Gekrümmter Zweifeldträger mit Torsionseinspannung über Zwischenstütze

Querschnitt



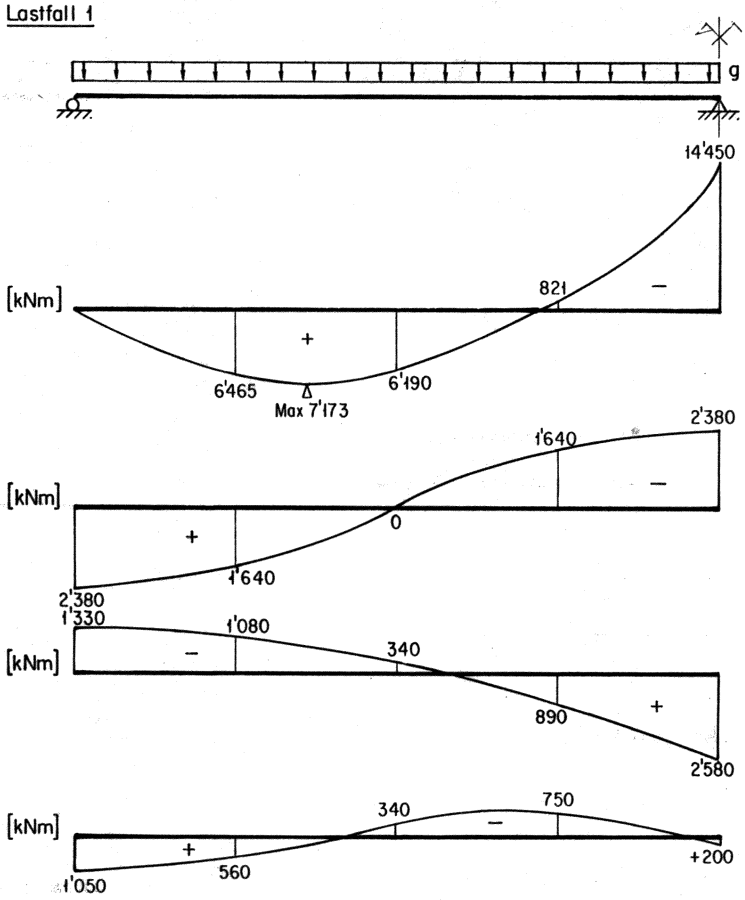
Kastenquerschnitt mit variabler Druckplatten-stärke beim Zwischen-auflager

Statisches Modell



Träger kreisförmig gekrümmt, Krümmungs-radius R = 50 m, Oeffnungs-winkel 2 × 30°

Lastfall 1



Eigengewicht g = 155 kN/m'

M(g)

T_{Gl} (g) — Gleichgewichtstorsion aus Trägerkrümmung am Einfeldträger

T_{Vt} (g) — Verträglichkeitstorsion aus Durchlaufwirkung

$T(g) = T_{Gl}(g) + T_{Vt}(g)$ — Torsion infolge Eigengewicht

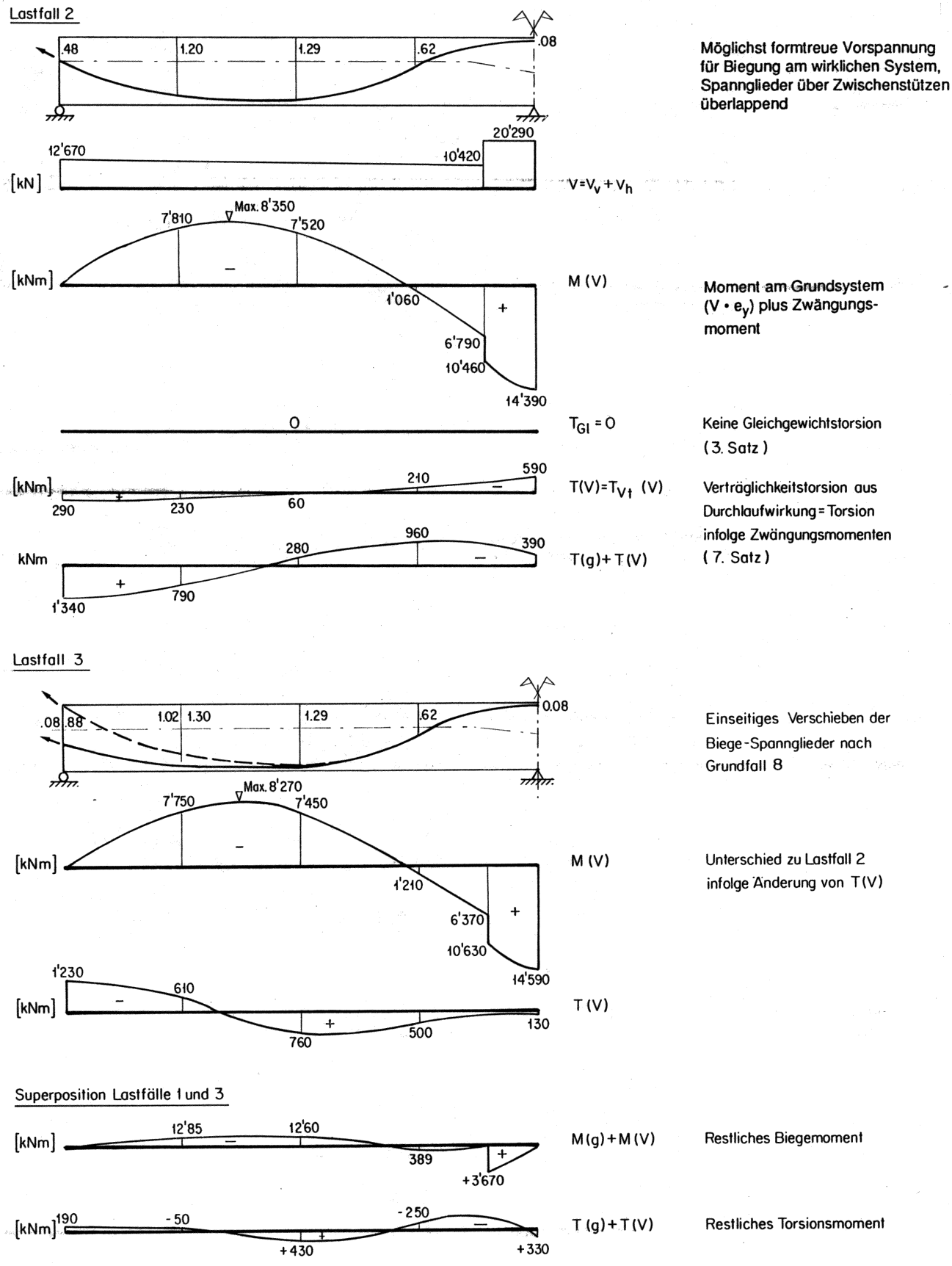
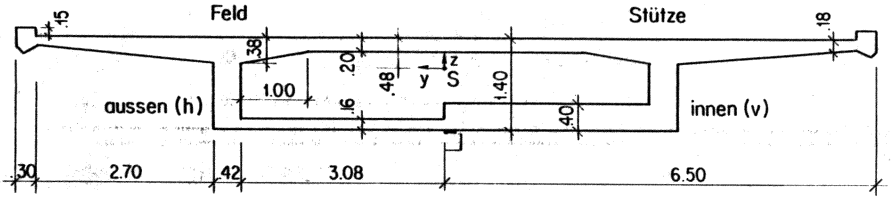


Bild 60: Praktisches Beispiel e): Gekrümmter Zweifeldträger mit Torsionseinspannung über Zwischenstütze

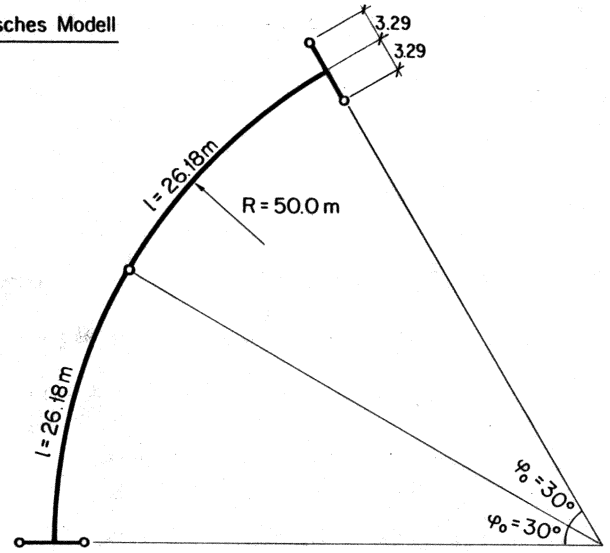
f) Gekrümmter Zweifeldträger ohne Torsionseinspannung über Zwischenstütze

Querschnitt



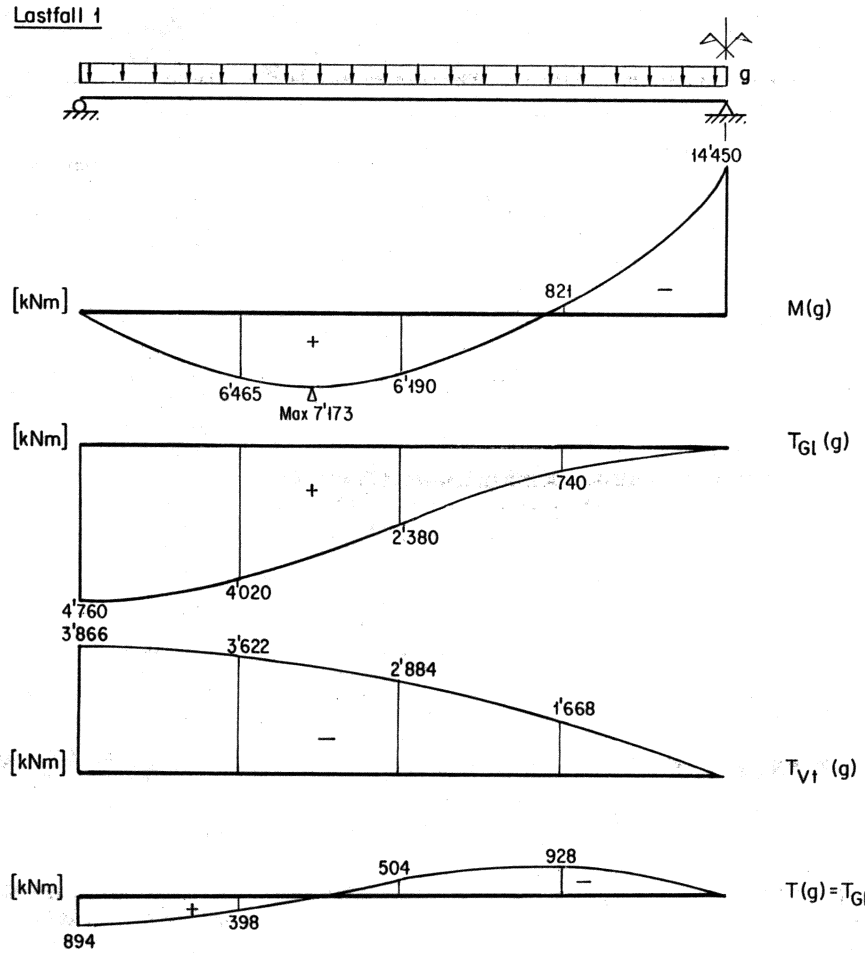
Kastenquerschnitt mit variabler Druckplatten-stärke beim Zwischen-auflager

Statisches Modell



Träger kreisförmig gekrümmt, Krümmungs-radius R = 50 m, Oeffnungs-winkel 2 × 30°

Lastfall 1



Eigengewicht g = 155 kN/m'

Gleichgewichtstorsion aus Trägerkrümmung am Einfeldträger

Verträglichkeitstorsion aus Durchlaufwirkung

Torsion infolge Eigengewicht

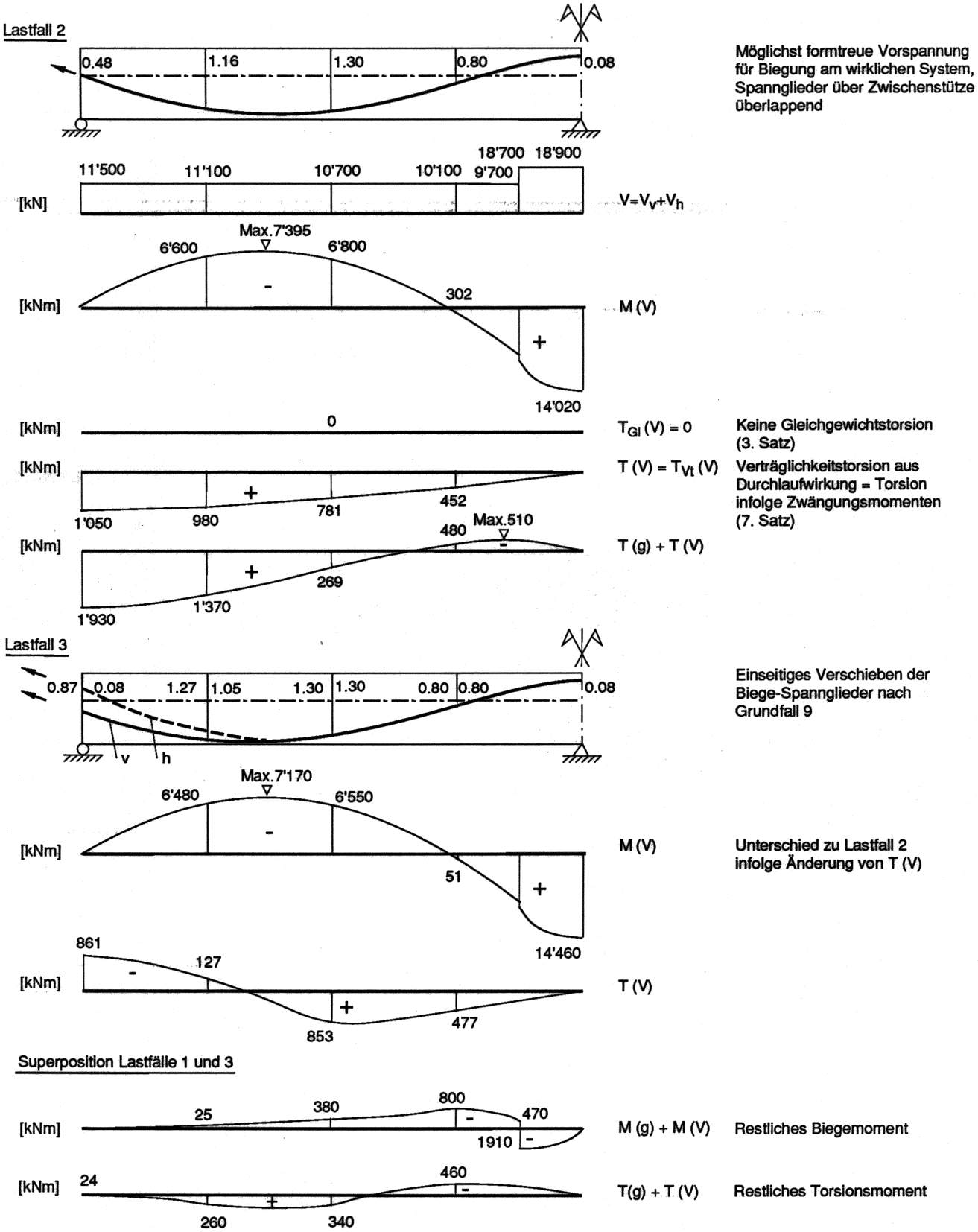
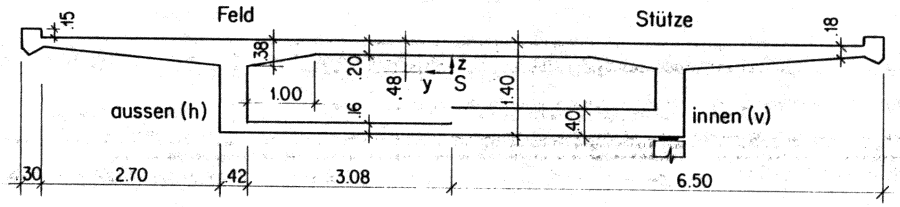


Bild 61: Praktisches Beispiel f): Gekrümmter Zweifeldträger ohne Torsionseinspannung über Zwischenstütze

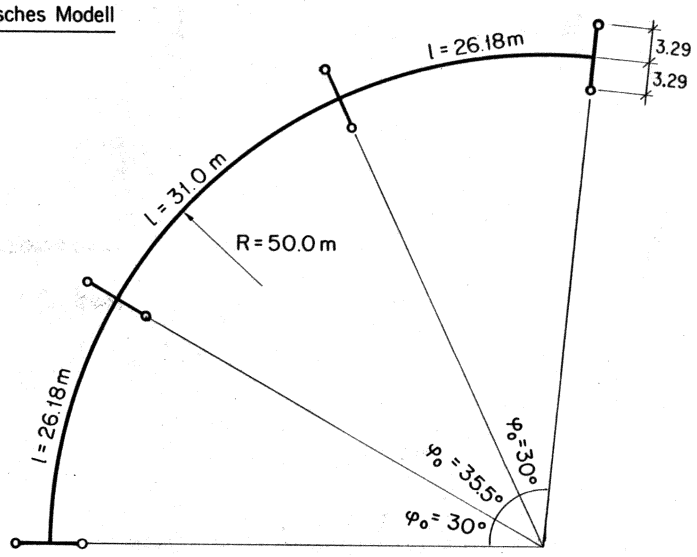
g) Gekrümmter Dreifeldträger mit Torsionseinspannung über Zwischenstützen

Querschnitt



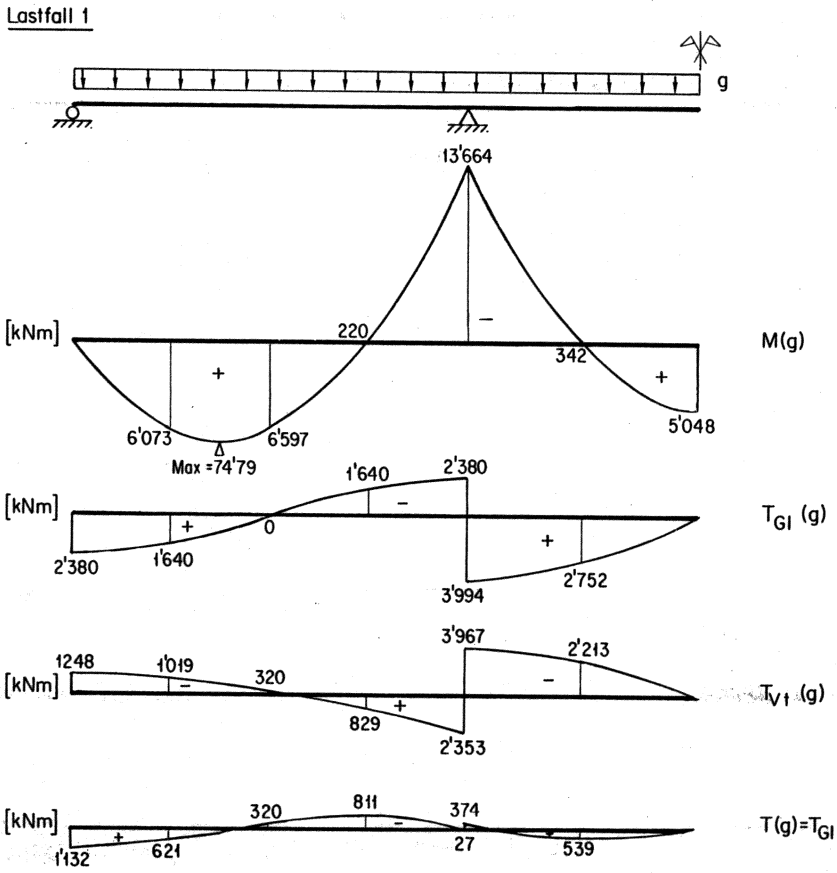
Kastenquerschnitt mit variabler Druckplatten-stärke beim Zwischen-auflager

Statisches Modell



Träger kreisförmig gekrümmt,
Krümmungsradius R = 50 m,
Oeffnungswinkel 30°, 35.5°, 30°

Lastfall 1



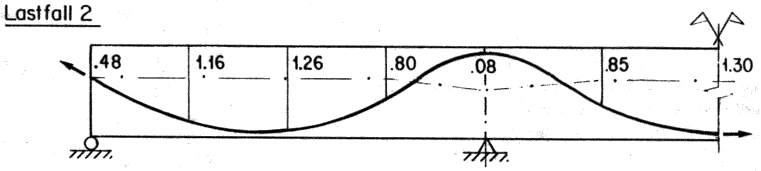
Eigengewicht g = 155 kN/m'

Gleichgewichtstorsion aus Trägerkrümmung

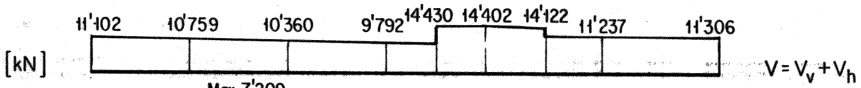
Verträglichkeitstorsion aus Durchlaufwirkung

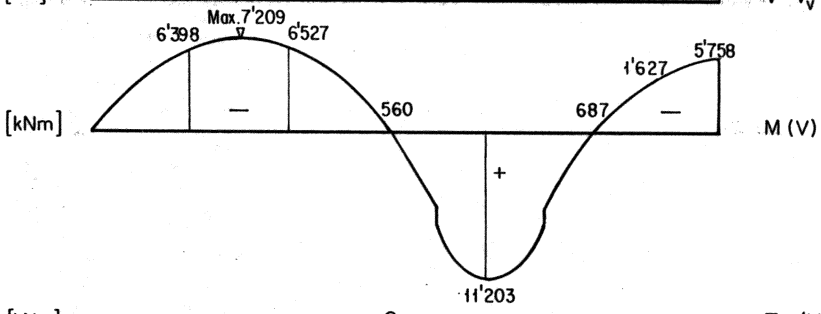
Torsion infolge Eigengewicht

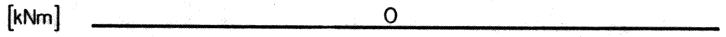
Lastfall 2



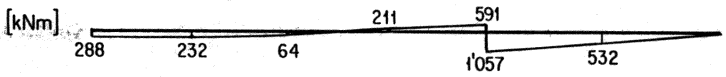
Möglichst formtreue Vorspannung für Biegung am wirklichen System, Spannglieder über Zwischenstützen überlappend



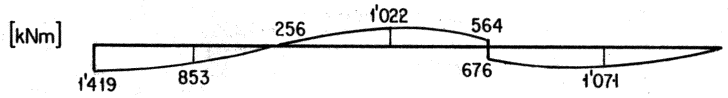




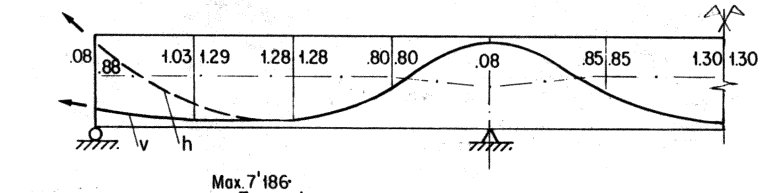
Keine Gleichgewichtstorsion (3. Satz)



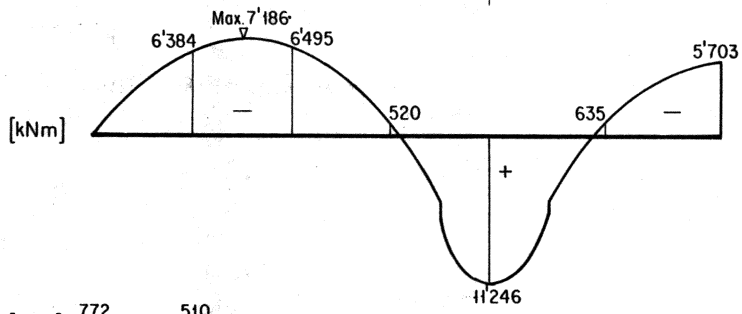
Verträglichkeitstorsion aus Durchlaufwirkung = Torsion infolge Zwängungsmomenten (7. Satz)



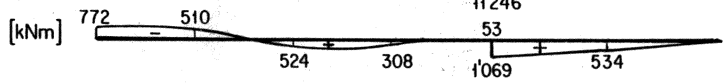
Lastfall 3



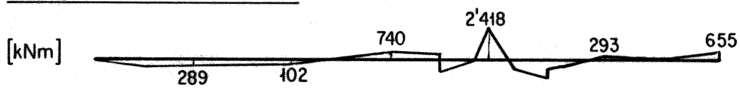
Einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder nach Grundfall 8



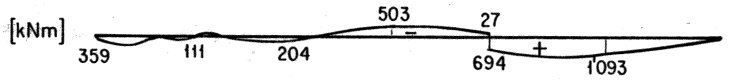
Unterschied zu Lastfall 2 infolge Änderung von T(V)



Superposition Lastfälle 1 und 3



Restliches Biegemoment

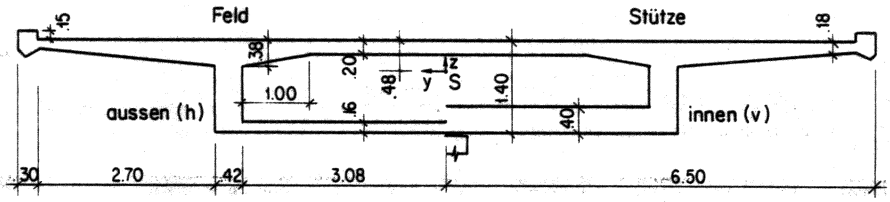


Restliches Torsionsmoment

Bild 62: Praktisches Beispiel g): Gekrümmter Dreifeldträger mit Torsionseinspannung über Zwischenstützen

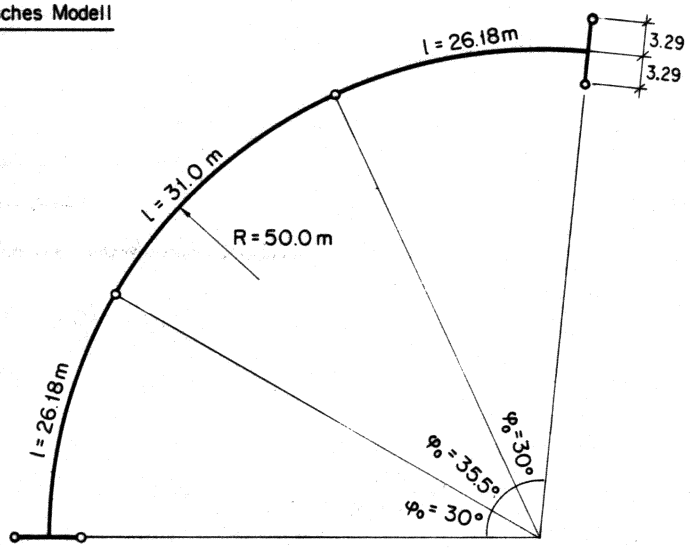
h) Gekrümmter Dreifeldträger ohne Torsionseinspannung über Zwischenstützen

Querschnitt



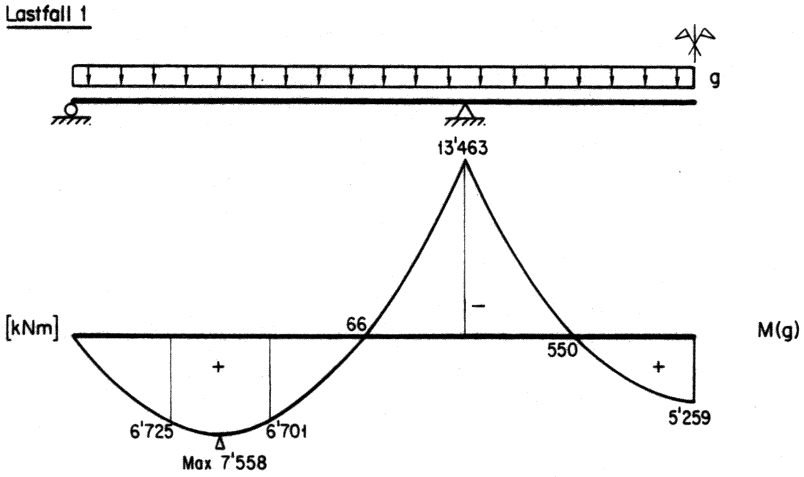
Kastenquerschnitt mit variabler Druckplatten-stärke beim Zwischen-auflager

Statisches Modell

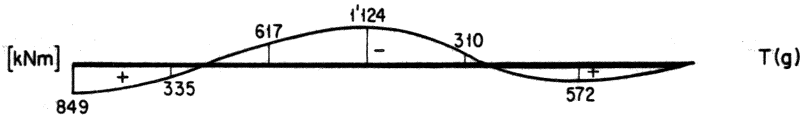


Träger kreisförmig gekrümmt, Krümmungsradius R = 50 m, Oeffnungswinkel 30°, 35.5°, 30°

Lastfall 1

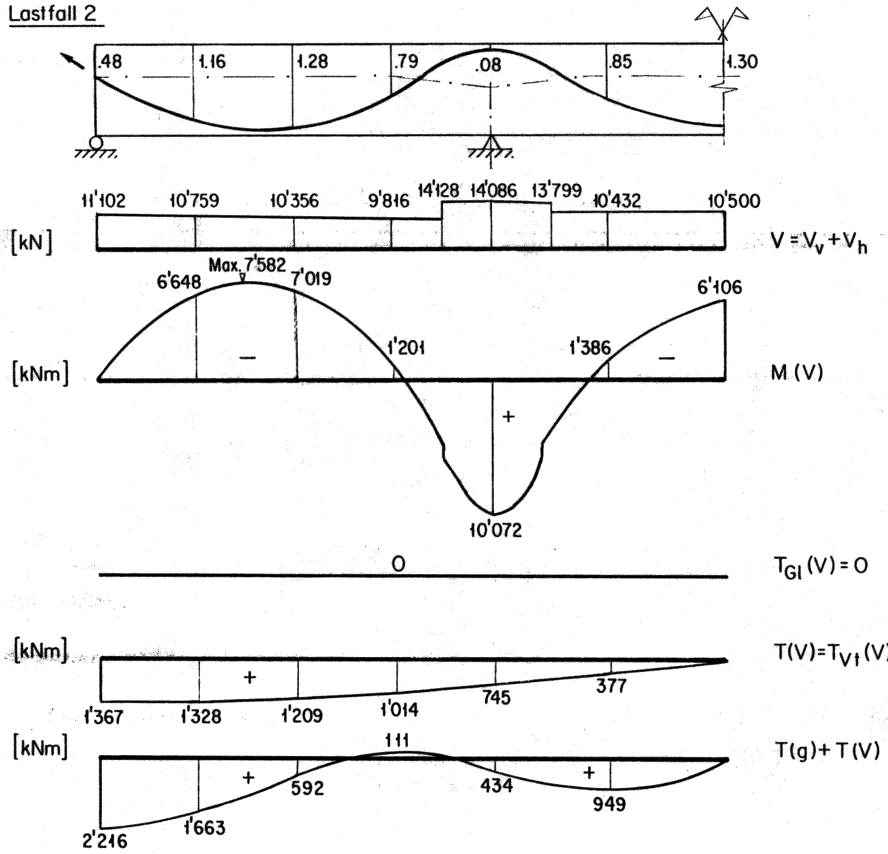


Eigengewicht g = 155 kN/m'



Gleichgewichtstorsion und Verträglichkeitstorsion

Lastfall 2

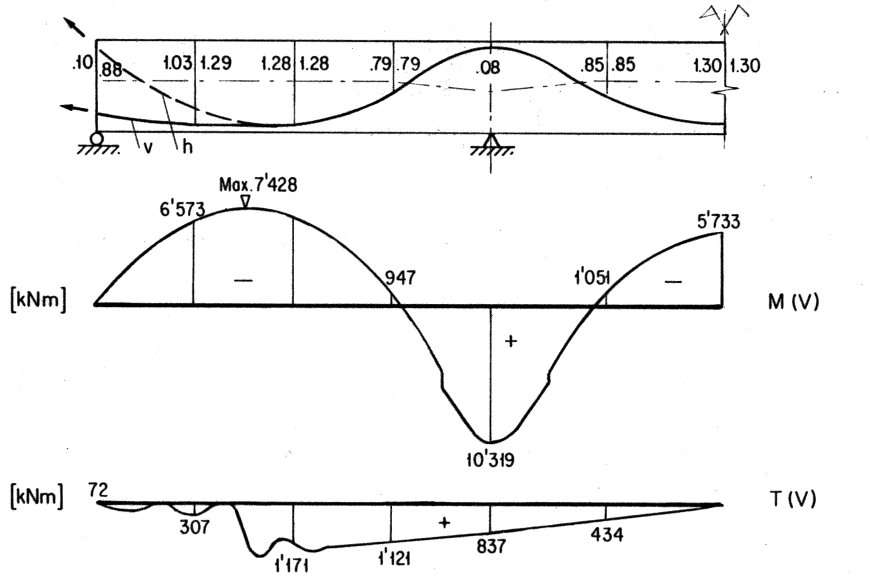


Möglichst formtreue Vorspannung für Biegung am wirklichen System, Spannglieder über Zwischenstützen überlappend

Keine Gleichgewichtstorsion (3. Satz)

Verträglichkeitstorsion aus Durchlaufwirkung = Torsion infolge Zwängungsmomenten (7. Satz)

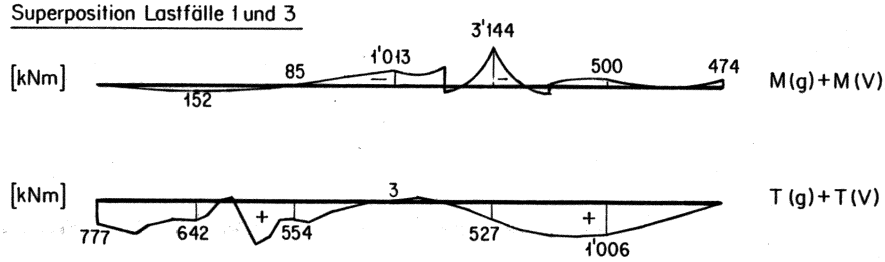
Lastfall 3



Einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder nach Grundfall 8

Unterschied zu Lastfall 2 infolge Änderung von T(V)

Superposition Lastfälle 1 und 3



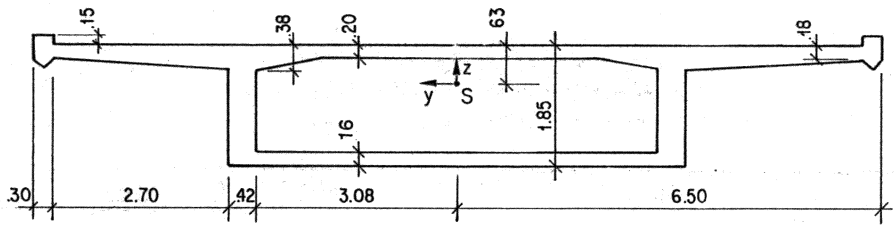
Restliches Biegemoment

Restliches Torsionsmoment

Bild 63: Praktisches Beispiel h): Gekrümmter Dreifeldträger ohne Torsionseinspannung über Zwischenstützen

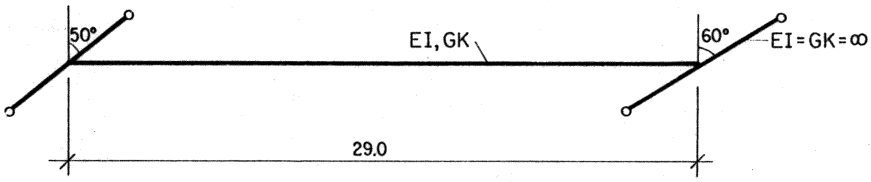
i) Schief gelagerter Einfeldträger

Querschnitt

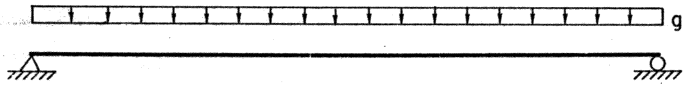


Kastenquerschnitt konstant über ganze Länge

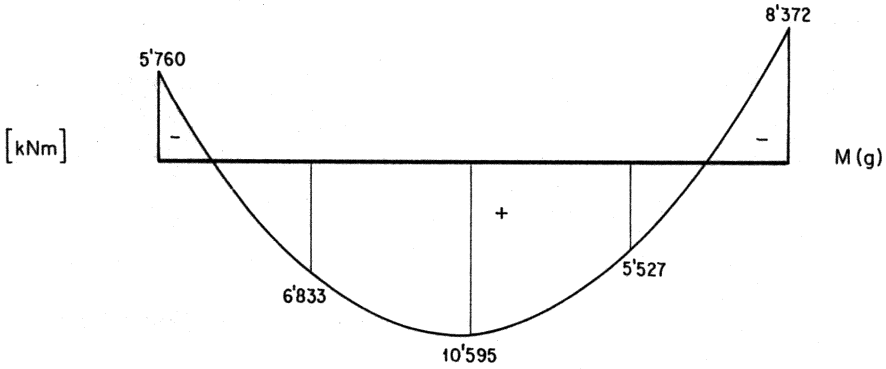
Statisches Modell

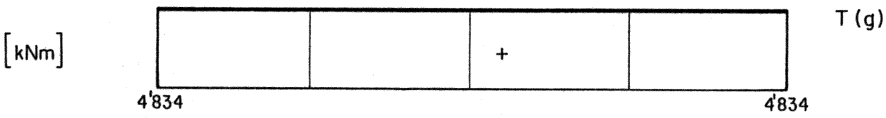


Lastfall 1



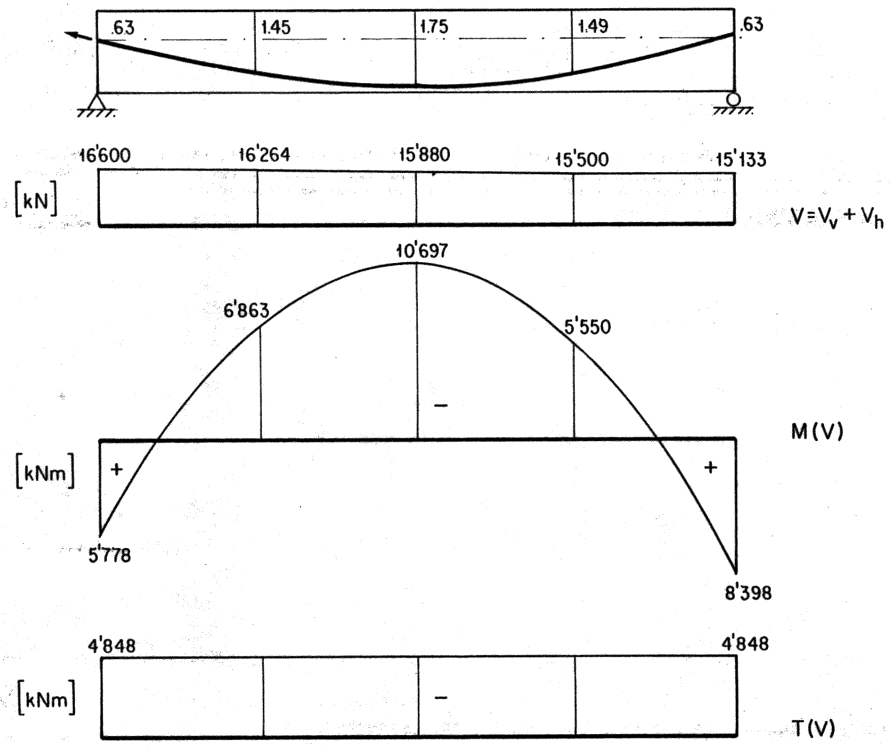
Eigengewicht g = 168 kN/m'





Verträglichkeitstorsion aus schiefer Lagerung

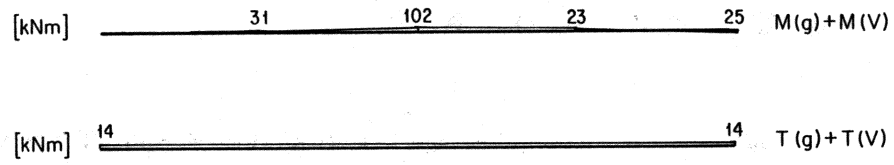
Lastfall 2



Möglichst formtreue Vorspannung für Biegung am Grundsystem (Verträglichkeitsbiegung aus schiefer Lagerung nicht berücksichtigt, 6. Satz).

Verträglichkeitstorsion aus schiefer Lagerung (6. Satz)

Superposition Lastfälle 1 und 2



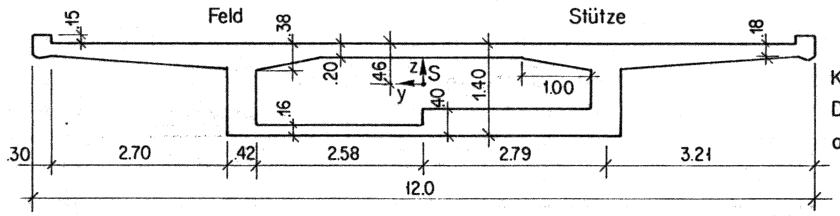
Restliches Biegemoment

Restliches Torsionsmoment (v.a. infolge Reibung)

Bild 64: Praktisches Beispiel i): Schief gelagerter Einfeldträger

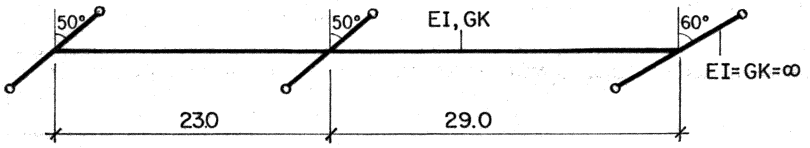
k) Schief gelagerter Zweifeldträger

Querschnitt



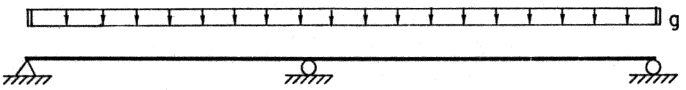
Kastenquerschnitt mit variabler Druckplattenstärke beim Zwischenauflager

Statisches Modell

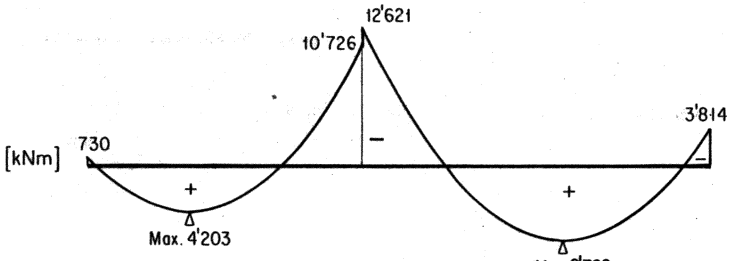


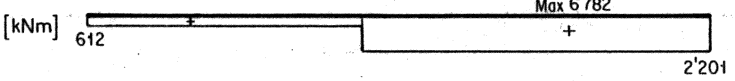
Durchlaufender Zweifeldträger mit unterschiedlichen Spannweiten und Lagerschiefen

Lastfall 1



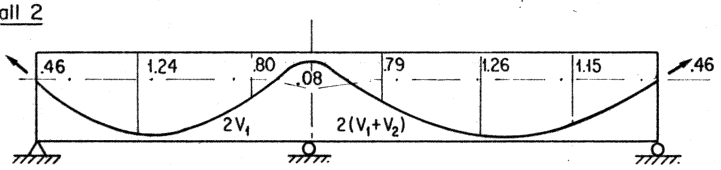
Eigengewicht g = 140 kN/m'



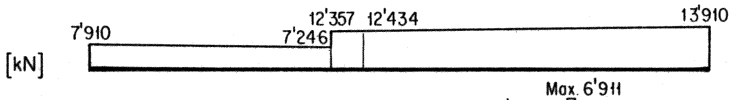


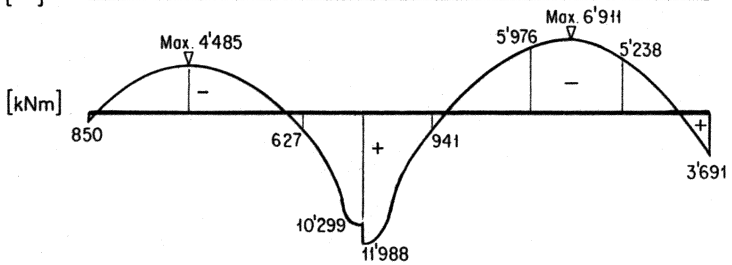
Verträglichkeitstorsion aus schiefer Lagerung

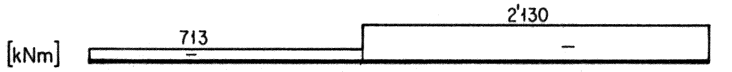
Lastfall 2



Möglichst formtreue Vorspannung für Biegung am wirklichen System (Verträglichkeitsbiegung aus schiefer Lagerung nicht berücksichtigt, 6. Satz).

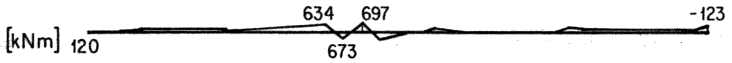






Verträglichkeitstorsion aus schiefer Lagerung (6. Satz)

Superposition Lastfälle 1 und 2



Restliches Biegemoment

Restliches Torsionsmoment

Bild 65: Praktisches Beispiel k): Schief gelagerter gerader Zweifeldträger

1.3.5 Folgerungen

Aus den vorangehend dargestellten praktischen Beispielen können die nachstehenden wichtigen Folgerungen abgeleitet werden:

Exzentrisch belastete und gekrümmte Träger

In exzentrisch belasteten und in gekrümmten Trägern sind die Biege-Spannglieder vorerst gleich wie in analogen zentrisch belasteten und geraden Trägern vorzusehen. Dabei sind eine möglichst formtreue Vorspannung für Biegung für eine bestimmte äussere Belastung oder ein gewünschter Vorspanngrad für diese Belastung anzustreben. Anschliessend kann durch Verschieben der Biege-Spannglieder die Torsion aus äusserer Belastung so weit als möglich kompensiert werden. Es lassen sich die folgenden Fälle unterscheiden:

Einfeldträger

Bei exzentrisch belasteten (Bild 56) und bei gekrümmten (Bild 59) Einfeldträgern kann die Torsion aus äusserer Belastung - bis zu einer Grenzexzentrizität bzw. bis zu einem Grenzwinkel - durch beidseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder bei den Auflagern voll kompensiert werden.

Zweifeldträger

Bei exzentrisch belasteten (Bild 57) und bei gekrümmten (Bilder 60, 61) Zweifeldträgern kann die Torsion aus äusserer Belastung durch einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder bei den Endauflagern weitgehend kompensiert werden.

Drei- und Mehrfeldträger

Bei exzentrisch belasteten (Bild 58) und bei gekrümmten (Bilder 62, 63) Drei- und Mehrfeldträgern kann in den Randfeldern die Torsion aus äusserer Belastung durch einseitiges Verschieben der Biege-Spannglieder bei den Endauflagern weitgehend kompensiert werden. In den Innenfeldern hingegen müssen, sofern durch Vorspannung der Torsion aus äusserer Belastung entgegengewirkt werden soll, spezielle Torsions-Spannglieder, z.B. in den Flanschen, angeordnet werden.

Schief gelagerte Träger

In schief gelagerten Ein- und Mehrfeldträgern (Bilder 64, 65) sind die Spannglieder gleich wie in analogen senkrecht gelagerten Trägern vorzusehen. Dabei ist eine formtreue Vorspannung für Biegung für eine bestimmte äussere Belastung anzustreben. Hiermit wird die Torsion infolge schiefer Lagerung aus dieser Belastung voll kompensiert.

2. Beanspruchung in Querrichtung

Ziel des 1. Kapitels war es, Methoden für eine zweckmässige Führung und Dimensionierung der Spannglieder in Stabtragwerken für Beanspruchungen in Längsrichtung zu entwickeln.

Ziel des 2. Kapitels ist es zu zeigen, wie auf einfache und anschauliche Weise die Beanspruchungen in Querrichtung der - meist dünnwandigen - Stabquerschnitte ermittelt werden können.

Als Ursachen für die Querbeanspruchung sollen sowohl die Vorspannung in Längsrichtung als auch äussere Belastungen - Eigengewicht und Nutzlasten - der Stabtragwerke berücksichtigt werden.

2.1 Grundlagen

Annahmen

Es werden die folgenden Annahmen zugrunde gelegt:

- Homogener, ungerissener Zustand
- Lineares elastisches Verhalten
- Erhaltung der Querschnittsform.

Damit wird es insbesondere möglich sein,

- die Schubspannungen - und somit auch die differentiellen Schubspannungen - infolge Querkraft und Torsion aus der Beanspruchung in Längsrichtung nach der einfachen Balken-Biegelehre, und
- die Schnittkräfte in Querrichtung bei statisch unbestimmten Querschnittsformen nach der elastischen Stabstatik

zu ermitteln.

Eine allfällige Modifikation der Resultate infolge Abweichungen von den obigen Annahmen ist indessen stets im Auge zu behalten.

Prinzipielles Vorgehen

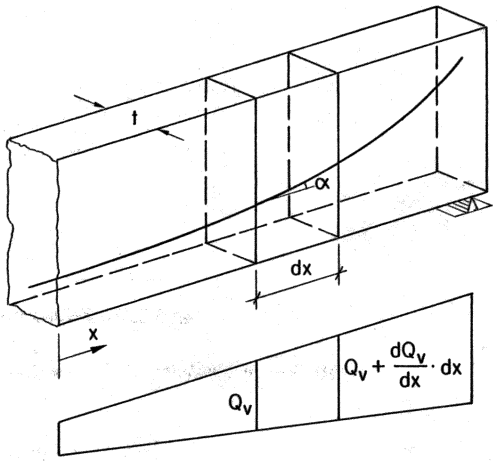
Normalerweise wird wie folgt vorgegangen:

1. Herausgreifen eines Stabelementes dx bzw. Δx.
2. Eintragen der daran in Querrichtung angreifenden Kräfte:
   a) "Aeussere" Belastung u, g, p
   b) Differentieller Schubfluss $d(\tau \cdot t)$ bzw. $\Delta(\tau \cdot t)$ infolge dQ bzw. ΔQ oder dT bzw. ΔT.
3. Berechnen der Schnittkräfte in Querrichtung: N, M, Q.

2.2 Rechteckquerschnitt

Es werden Träger mit einem verhältnismässig schmalen Rechteckquerschnitt betrachtet.

Vorspannung



$Q_v(x) = V(x) \cdot \sin\alpha(x)$

Bild 66: Querkräfte infolge Vorspannung

Am Stabelement dx greifen die folgenden vertikalen Kräfte an:

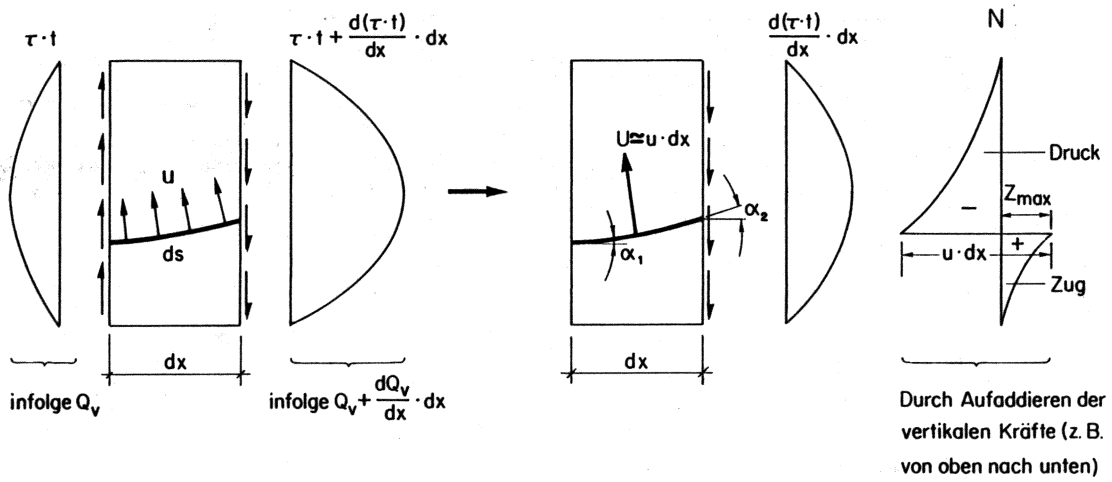


Bild 67: Rechteckquerschnitt, Stabelement mit vertikalen Kräften aus Vorspannung

Mit den berücksichtigten vertikalen Kräften ist das Element nicht im Gleichgewicht. Es wirken links und rechts, oben und unten, zusätzliche horizontale Kräfte, deren Differenzen das Biegemoment verändern und zusammen mit den berücksichtigten vertikalen Kräften das Element im Gleichgewicht halten. Diese horizontalen Kräfte können jedoch für den hier angestrebten Zweck ausser acht gelassen werden.

$U = u \cdot ds \approx u \cdot dx$; $u \cdot dx = V \cdot (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = dQ_v$;

$\frac{d(\tau \cdot t)}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}(\frac{Q \cdot S}{I}) \cdot dx = \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{S}{I} \cdot dx$ → <u>Differentieller Schubfluss aus Querkraft.</u>

Für praktische Zwecke können Differenzen anstelle von differentiellen Grössen eingeführt werden:

$dx \rightarrow \Delta x$, $dQ \rightarrow \Delta Q$, $d(\tau \cdot t) \rightarrow \Delta(\tau \cdot t)$: $\Delta(\tau \cdot t) = \frac{\Delta Q \cdot S}{I}$.

Der differentielle Schubfluss ist stets gleich verteilt wie der Schubfluss!

Die Grösse der maximalen Zugkraft im Steg ist von der Spanngliedlage abhängig:

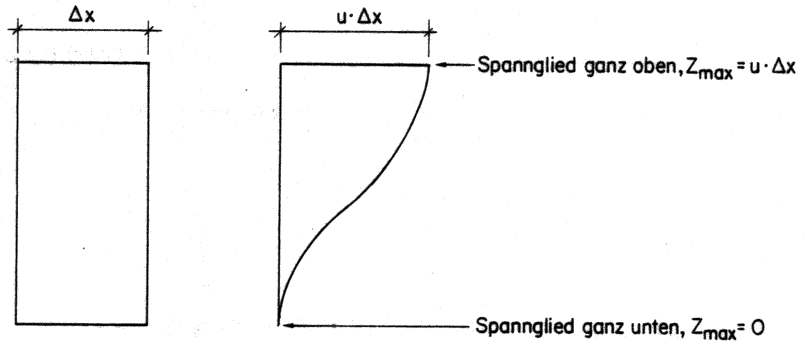


Bild 68: Rechteckquerschnitt, Einfluss der Spanngliedlage auf die Grösse der maximalen Zugkraft

Unterhalb der Spannglieder können somit beträchtliche <u>vertikale Zugkräfte</u> entstehen. Dies führt gelegentlich in Balken mit dünnen Stegen - trotz Bügeln - zu gut sichtbaren Rissen. Ferner ist es in Plattenbrücken ohne genügende Verbügelung schon zu Ausbrüchen grösserer Bereiche oder gar zu einem Aufspalten der Platte in zwei übereinanderliegende Teile gekommen!

Eigengewicht

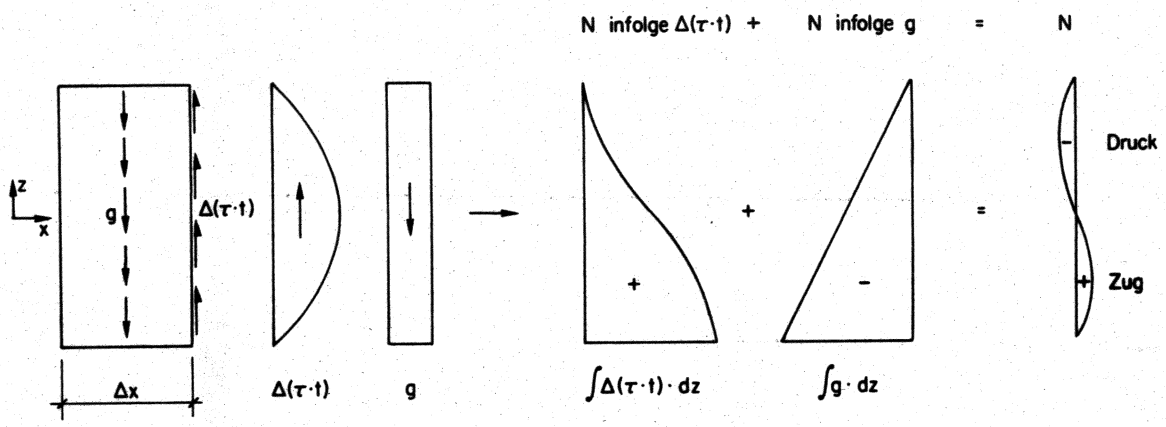


Bild 69: Rechteckquerschnitt, Stabelement mit vertikalen Kräften aus Eigengewicht

Die vertikale Beanspruchung durch Eigengewicht ist im allgemeinen unbedeutend.

Nutzlast

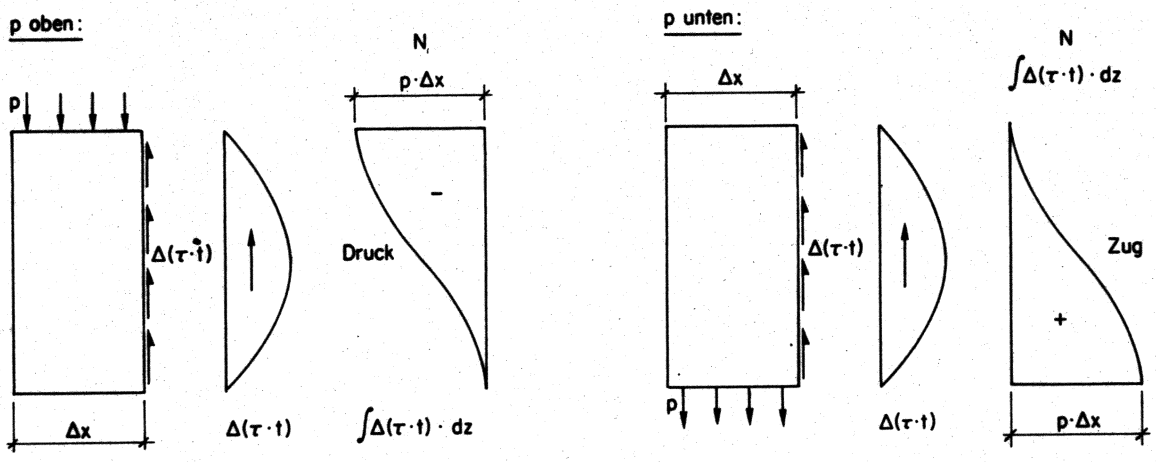


Bild 70: Rechteckquerschnitt, Stabelement mit vertikalen Kräften aus Nutzlast

Das Ergebnis entspricht der bekannten Regel, wonach eine unten angreifende Nutzlast durch entsprechende Bügel aufgehängt werden muss.

Wichtige Folgerung

Auch wenn in einem Tragwerk die Querkräfte aus äusserer Last und aus Vorspannung sich weitgehend kompensieren, und daher die Schubspannungen insgesamt unterhalb der unteren Schubspannungsgrenze bleiben, und somit aus der Querkraftbeanspruchung rechnerisch keine Bügel resultieren, können trotzdem erhebliche vertikale Zugkräfte auftreten und eine entsprechende Bügelbewehrung erforderlich machen.

2.3 Einzelliger Kastenquerschnitt mit vertikalen Stegen

Es werden Träger mit einzelligem Kastenquerschnitt und verhältnismässig dünnen Stegen und Flanschen betrachtet.

Symmetrische Vorspannung

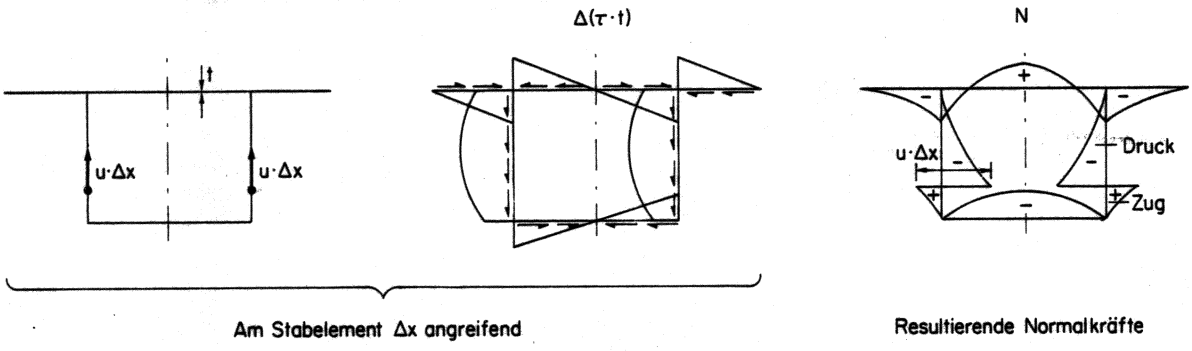


Bild 71: Kastenquerschnitt, Beanspruchung durch symmetrische Vorspannung

In den Stegen entsprechen die vertikalen Zugkräfte denjenigen im Rechteckquerschnitt.

In der oberen Platte kann bei verhältnismässig kurzen (oder fehlenden) Kragarmen eine - meist unbedeutende - Querzugkraft entstehen. Diese ist abhängig von der Grösse der Umlenkkräfte, nicht aber von der Höhenlage der Spannglieder in den Stegen.

Symmetrische Belastung

Zum Beispiel Belastung aus Eigengewicht und Nutzlast der Platte an Unterseite der Stege angreifend:

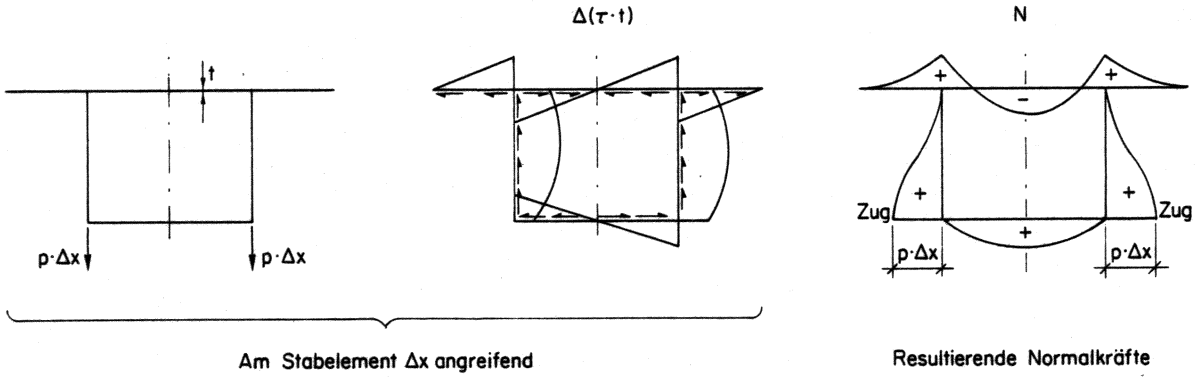


Bild 72: Kastenquerschnitt, Beanspruchung durch symmetrische Belastung

Die untere Platte ist durch entsprechende Bügel aufzuhängen.

Bei gleichzeitiger Wirkung einer Vorspannung addieren sich die Zugkräfte aus Vorspannung und unterer Platte, wobei erstere meist erheblich grösser sind ($u \approx g$).

Unsymmetrische Vorspannung

Zum Beispiel Vorspannung für reine Torsion:

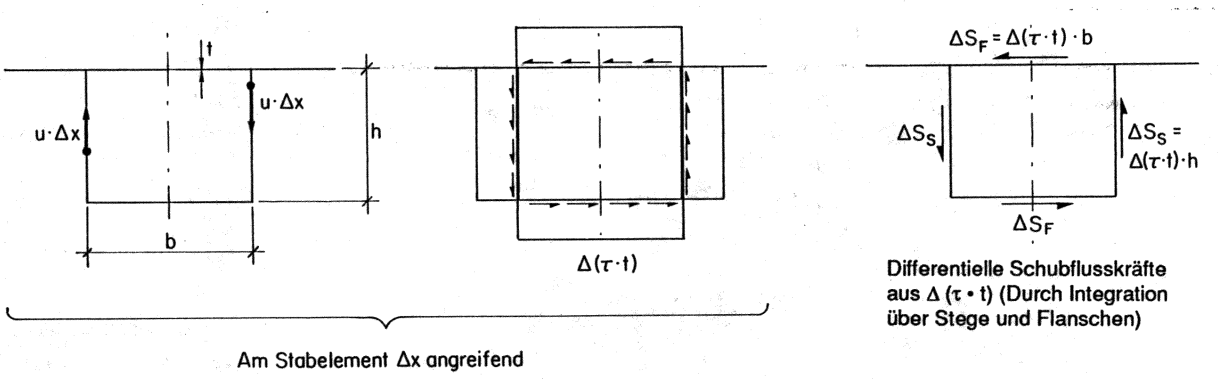


Bild 73: Kastenquerschnitt, Beanspruchung durch Torsionsvorspannung, angreifende Kräfte

$$\frac{d(\tau \cdot t)}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{T}{2 \cdot F_o}\right) \cdot dx = \frac{dT}{dx} \cdot \frac{1}{2 \cdot F_o} \cdot dx \quad \rightarrow$$ Differentieller Schubfluss aus Torsion

Für praktische Zwecke können Differenzen anstelle von differentiellen Grössen eingeführt werden:

$$dx \rightarrow \Delta x, \quad dT \rightarrow \Delta T, \quad d(\tau \cdot t) \rightarrow \Delta(\tau \cdot t): \quad \Delta(\tau \cdot t) = \frac{\Delta T}{2 \cdot F_o} \quad ;$$

$$\Delta T = m_t = b \cdot u \cdot \Delta x = \Delta S_S \cdot b + \Delta S_F \cdot h = 2 \cdot \Delta(\tau \cdot t) \cdot b \cdot h \quad ; \quad F_o = b \cdot h$$

$$\Delta S_S = \Delta(\tau \cdot t) \cdot h = \frac{\Delta T}{2 \cdot b} = \frac{u \cdot \Delta x}{2} \quad ; \quad \Delta S_F = \Delta(\tau \cdot t) \cdot b = \frac{\Delta T}{2 \cdot h} = \frac{u \cdot \Delta x}{2} \cdot \frac{b}{h} \quad .$$

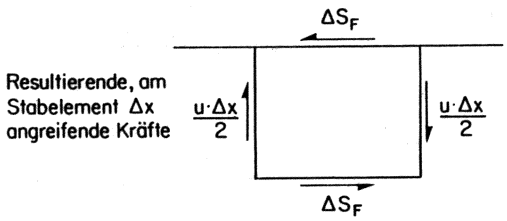


Bild 74: Kastenquerschnitt, Beanspruchung durch Torsionsvorspannung, resultierende angreifende Kräfte

Diese Kräfte bewirken insbesondere eine Querbiegung, die im allgemeinen durch Berechnung an einem statisch unbestimmten Rahmen zu ermitteln ist.

Sofern bei einem zur vertikalen Schweraxe symmetrischen Querschnitt wie üblich die beiden Stege die gleichen und die beiden Flansche unterschiedliche Querbiegesteifigkeiten aufweisen, befinden sich die Momentennullpunkte in

den Flanschen in der Mitte, so dass dort Gelenke angenommen werden können. Da ferner die Stege meist wesentlich steifer sind als die Flanschen, verteilt sich die angreifende Stegkraft auf die Flanschen näherungsweise nach den Flanschsteifigkeiten.

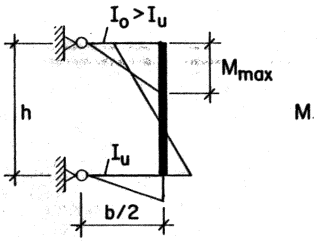


Bild 75: Kastenquerschnitt mit Torsionsvorspannung, statisches Modell und resultierende Querbiegemomente

Das maximale Querbiegemoment in der oberen Rahmenecke ergibt sich zu

$$M_{max} = \frac{u \cdot \Delta x}{2} \cdot \frac{I_o}{I_o + I_u} \cdot \frac{b}{2} = \frac{m_t}{4} \cdot \frac{I_o}{I_o + I_u} \quad .$$

Für den Spezialfall $I_o = I_u$ wird

$$M_{max} = \frac{u \cdot \Delta x \cdot b}{8} = \frac{m_t}{8} \quad .$$

<u>Unsymmetrische Belastung</u>

Zum Beispiel oben einseitig angreifend:

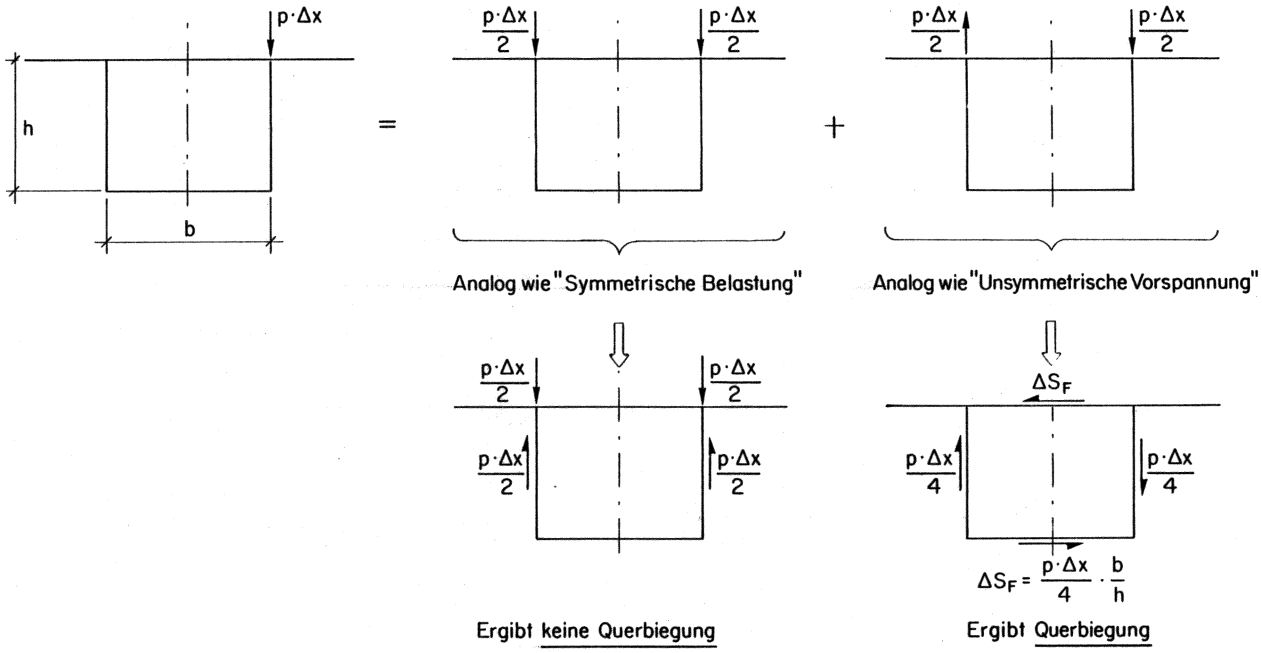


Bild 76: Kastenquerschnitt, Beanspruchung durch unsymmetrische Belastung, angreifende Kräfte

Numerisches Beispiel für die Grösse des Querbiegemomentes mit p = 20 kN/m', I_o/I_u = 3, b = 6 m, Δx = 1 m:

$$M_{max} = \frac{p \cdot \Delta x}{4} \cdot \frac{I_o}{I_o + I_u} \cdot \frac{b}{2} = \frac{m_t}{4} \cdot \frac{I_o}{I_o + I_u} = \frac{20\ kN/m' \cdot 1m}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6m}{2} = 11.2\ kNm$$

Auflagerung ohne Querträger

Von besonderem Interesse ist die Querbiegebeanspruchung, die beim Auflager eines torsionsbeanspruchten Balkens bei fehlendem Endquerträger auftritt.

Unsymmetrische Belastung

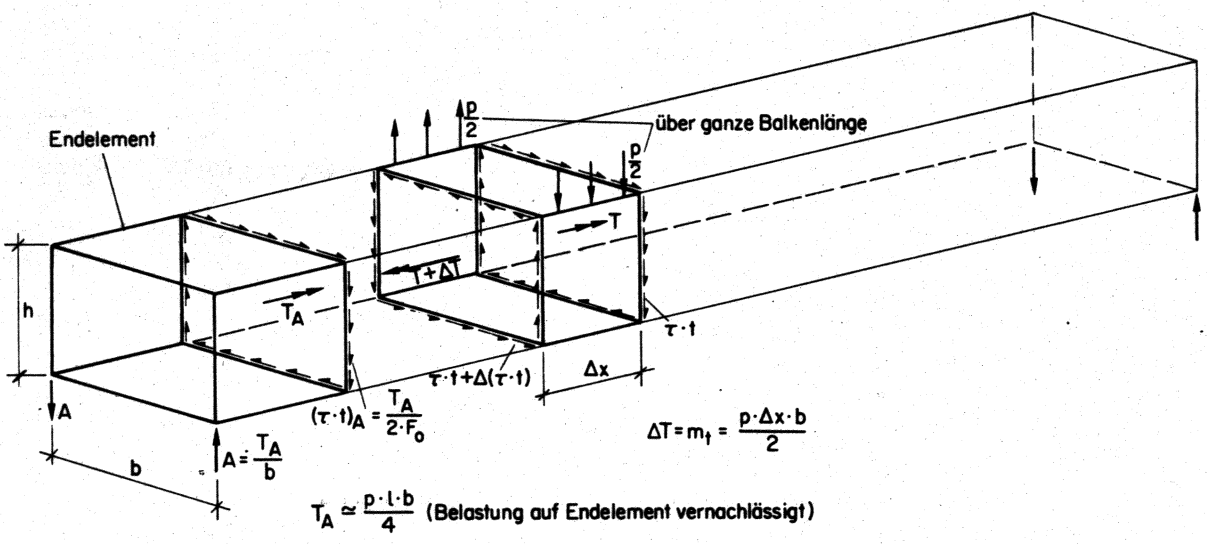


Bild 77: Kastenträger ohne Endquerträger, Querbeanspruchung des Endelementes durch unsymmetrische Belastung

Das Auflagertorsionsmoment T_A muss durch Querbiegung des querträgerlosen Endelementes eingeleitet werden. Auf das Endelement wirken einerseits der Schubfluss $(\tau \cdot t)_A$ aus dem Auflagertorsionsmoment T_A und andererseits die Auflagerkräfte A. In den vorangehend hergeleiteten Beziehungen für die Beanspruchung eines Stabelementes bei unsymmetrischer Belastung müssen daher der differentielle Schubfluss $\Delta(\tau \cdot t)$ durch den Schubfluss $(\tau \cdot t)$ und die äusseren Belastungen $(p \cdot \Delta x/2)$ durch die Auflagerkräfte A ersetzt werden.

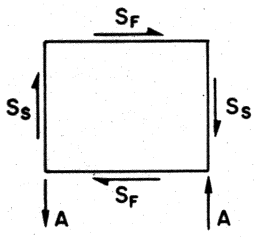


Bild 78: Kastenträger ohne Endquerträger, am Endelement angreifende Kräfte

Resultierende angreifende Kräfte:

$$S_S = (\tau \cdot t)_A \cdot h = \frac{T_A}{2 \cdot F_o} \cdot h = \frac{T_A}{2 \cdot b}$$

$$S_F = (\tau \cdot t)_A \cdot b = \frac{T_A}{2 \cdot F_o} \cdot b = \frac{T_A}{2 \cdot h}$$

Resultierendes Querbiegemoment:

$$M_{max} = \frac{A}{2} \cdot \frac{I_o}{I_o + I_u} \cdot \frac{b}{2} \quad .$$

Numerisches Beispiel für die Grösse des Querbiegemomentes mit p = 20 kN/m', I_o/I_u = 3, b = 6 m, l = 50 m :

$$T_A \simeq \frac{p \cdot l \cdot b}{4} = \frac{20 \text{ kN/m}' \cdot 50\text{m} \cdot 6\text{m}}{4} = 1500 \text{ kNm}$$

$$A = \frac{T_A}{b} = \frac{1500 \text{ kNm}}{6\text{m}} = 250 \text{ kN}$$

$$M_{max} = \frac{250 \text{ kN}}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6\text{m}}{2} = 281 \text{ kNm}$$

Die Länge des Endelementes und somit die örtliche spezifische Querbiegebeanspruchung (kNm/m') sind schwierig festzulegen (Krafteinleitungsproblem). In der Praxis sollte auf jeden Fall - sofern kein Endquerträger angeordnet wird - ein kräftiger, auf das Querbiegemoment bemessener Endrahmen ausgebildet werden.

Da die Ursache des Auflagertorsionsmomentes keine Rolle spielt, können diese Ueberlegungen auch bei gekrümmten Trägern ohne Endquerträger angewendet werden.

Verlauf der Querbiegung am ganzen Stab:

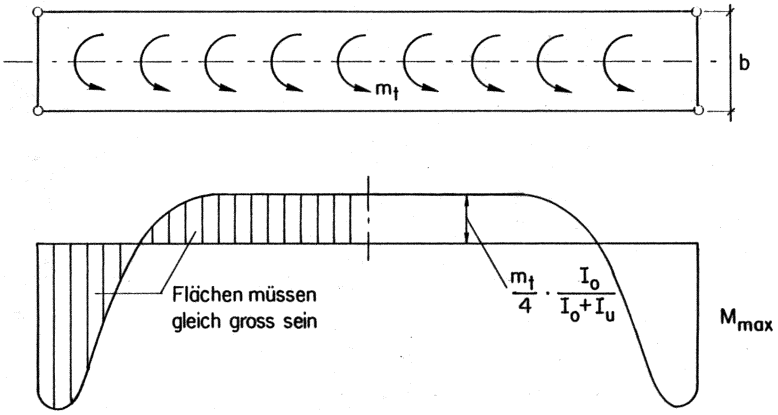


Bild 79: Kastenträger ohne Endquerträger, Verteilung des Querbiegemomentes in Längsrichtung

Verlauf der Querbiegung bei vorhandenem Endquerträger:

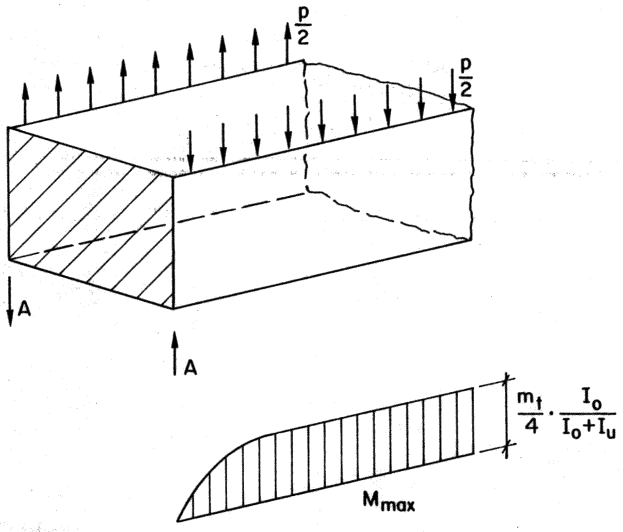


Bild 80: Kastenträger mit Endquerträger, Verteilung des Querbiegemomentes in Längsrichtung.

Gegen das Trägerende zu wird die Querbiegung durch die Schubsteifigkeit des Endquerträgers behindert und muss auf null abnehmen (Drillungsbeanspruchung der Stege und Flanschen).

Für den theoretischen Fall, dass kein schubsteifer Endquerträger vorhanden ist, aber trotzdem der "Auflagerschubfluss" am Endelement angreift, ergibt sich keine Abnahme der Querbiegung gegen das Trägerende zu.

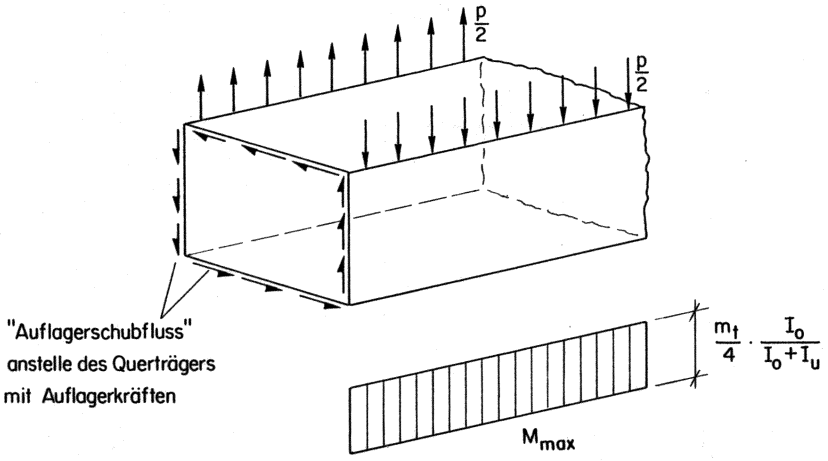


Bild 81: Kastenträger mit "Auflagerschubfluss", Verteilung des Querbiegemomentes in Längsrichtung

Das Endelement erfährt die gleiche - relativ geringe - Querbiegung wie das allgemeine Stabelement.

Unsymmetrische Vorspannung

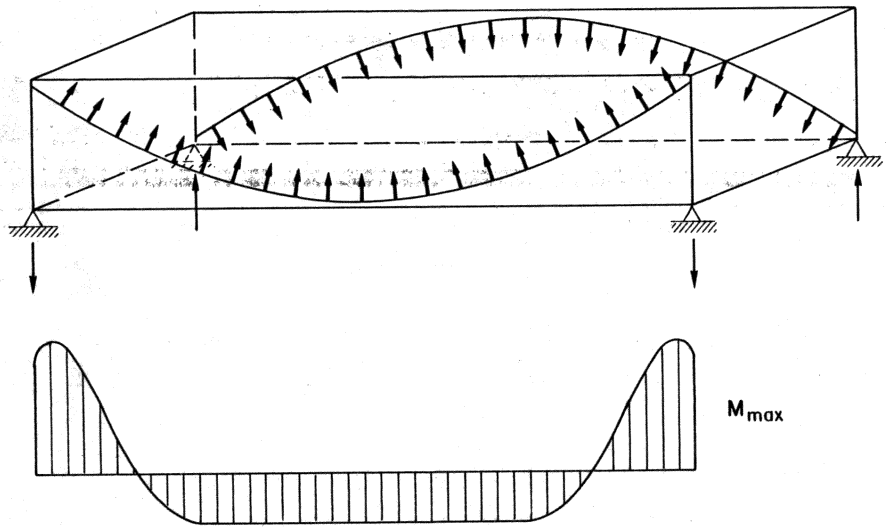


Bild 82: Kastenträger ohne Endquerträger, Verteilung des Querbiegemomentes in Längsrichtung bei unsymmetrischer Vorspannung

Die Ergebnisse sind analog zu denjenigen bei unsymmetrischer Belastung. An die Stelle der Linienlasten treten die Umlenkkräfte und an die Stelle der Auflagerkräfte die vertikalen Komponenten der Ankerkräfte.

2.4 Einzelliger Kastenquerschnitt mit geneigten Stegen

Beim Kastenquerschnitt mit geneigten Stegen stellt sich die Frage, ob durch die Schrägstellung der Stege - im Vergleich zu einem Kastenquerschnitt mit vertikalen Stegen - besondere Kräfte, z.B. in der oberen und unteren Platte, entstehen.

Symmetrische Vorspannung

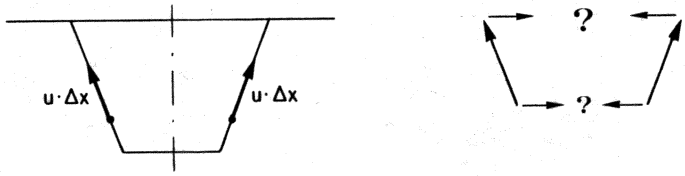
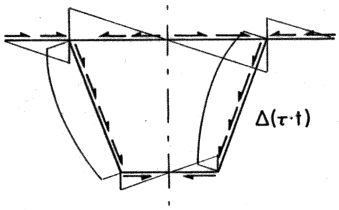
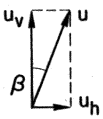


Bild 83: Kastenträger mit geneigten Stegen. Entstehen infolge der horizontalen Komponenten der Umlenkkräfte Zugbeanspruchungen in der oberen bzw. unteren Kastenplatte?

Die Aenderung der Querkraft aus Vorspannung längs eines Stabelementes Δx wird durch die vertikalen Komponenten der Umlenkkräfte bewirkt. Daher ist der differentielle Schubfluss $\Delta(\tau \cdot t)$ aus diesen Komponenten zu berechnen.





$u_v = u \cdot \cos\beta, \quad u_h = u \cdot \sin\beta$

$$\Delta(\tau \cdot t) = \frac{2 \cdot u_v \cdot \Delta x \cdot S}{I}$$

t: Stegdicke ⊥ Steg gemessen

Bild 84: Kastenträger mit geneigten Stegen, differentieller Schubfluss infolge vertikaler Komponenten der Umlenkkräfte

$2 \cdot u_v \cdot \Delta x$ ist auch gleich $\Delta(V \cdot \sin\alpha) \cdot \cos\beta$, mit α = Spanngliedneigung in der Stegebene.

Die resultierenden Normalkräfte verlaufen analog wie bei vertikalen Stegen:

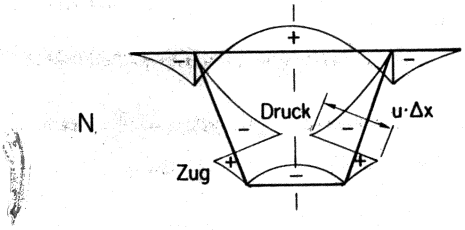


Bild 85: Kastenträger mit geneigten Stegen, Normalkräfte in Querrichtung infolge Vorspannung

Der Einfluss geneigter Stege auf die Normalkräfte in Querrichtung kann auch aufgrund einer anderen Betrachtungsweise beurteilt werden.

Der Kastenquerschnitt wird durch Lösen der Bindungen in der Mitte geteilt. Infolge der Vorspannung an den beiden Trägerhälften entstehen vertikale und horizontale Verschiebungen sowie eine Rotation der Teilquerschnitte (siehe Bild 86). Durch Formulieren der Verträglichkeitsbedingungen können die Normalkräfte in Querrichtung berechnet werden.

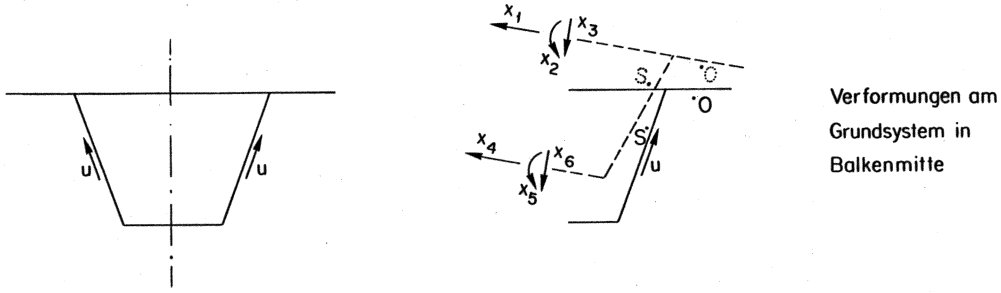


Bild 86: Kastenträger mit geneigten Stegen, Trägerhälfte mit gelösten Bindungen und überzähligen Grössen

$X_3 = X_6 = 0$ wegen Symmetrie

X_2 und X_5 haben geringen Einfluss auf die Grösse der Normalkräfte in Querrichtung

Extremfall "horizontale" Stege ($\beta = 90^o$:

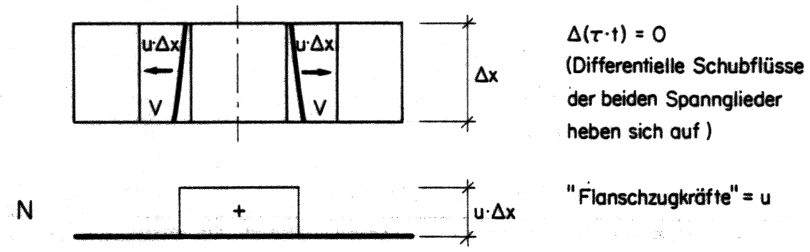


Bild 87 : Kastenträger mit "horizontalen" Stegen, Flanschzugkräfte infolge Umlenkkräfte

Im theoretischen Extremfall "horizontale" Stege ist keine vertikale Verschiebung und keine Rotation der Trägerhälften möglich. Die Normalkräfte in den Flanschen werden insgesamt gleich den Umlenkkräften.

Praktisches Beispiel mit verschiedenen Stegneigungen:

Einfeldriger Kastenträger, als einfacher Balken gelagert, Spannweite l = 35 m, Spannglieder parabelförmig mit V_{tot} = 19'580 kN, E_B = 30'000 N/mm². Betrachtung eines 1 m langen Stabelementes in Trägermitte.

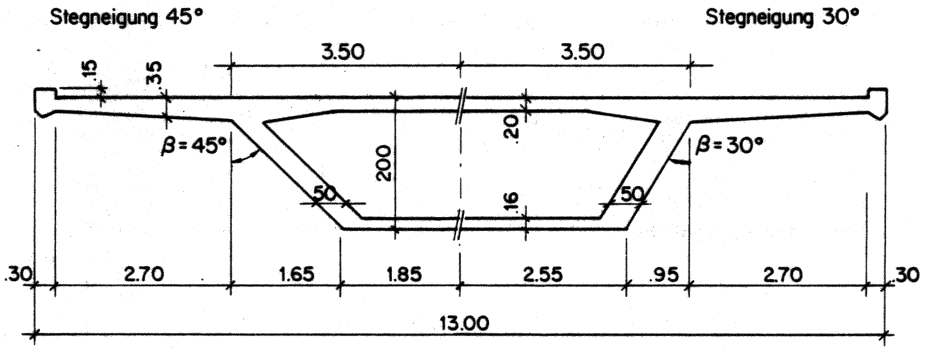


Bild 88 : Praktisches Beispiel eines Kastenquerschnittes mit geneigten Stegen

Für die angegebenen verschiedenen Stegneigungen und Breiten der unteren Platte (übrige Abmessungen unverändert) ergeben sich unter der Annahme, dass die Flanschbiegung vernachlässigt werden kann, die folgenden Flanschkräfte:

β	N_o [kN/m']	N_u [kN/m']
0°	+ 1.3	- 46.6
30°	+ 3.3	- 29.2
45°	+ 4.1	- 14.9

+ : Zug
- : Druck

Die Flanschkräfte ändern sich infolge Aenderung der Fläche des unteren Flansches und somit nicht primär infolge Aenderung der Stegneigung. Eine analoge Wirkung ergibt sich durch Aenderung der Flanschflächen bei vertikalen Stegen.

Symmetrische Belastung

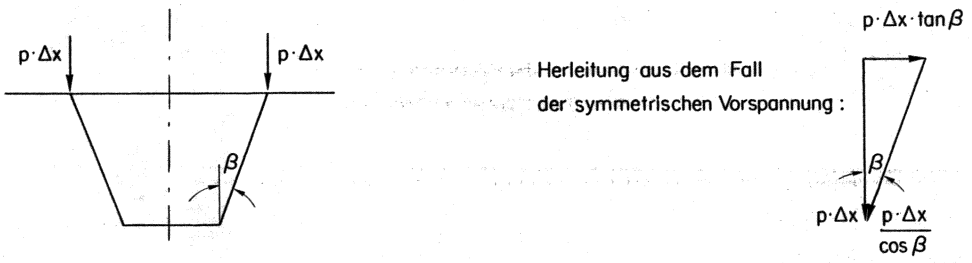


Bild 89 : Kastenträger mit geneigten Stegen und symmetrischer Belastung

Die Belastung p•Δx lässt sich zusammensetzen aus der horizontalen Komponente p•Δx•tanβ und der Komponente p•Δx/cosβ in der Stegebene, die im Vergleich zum Fall der symmetrischen Vorspannung der Kraft u•Δx entspricht. Somit wird der Oberflansch infolge Schrägstellung der Stege durch eine zusätzliche Zugkraft p•Δx•tanβ beansprucht.

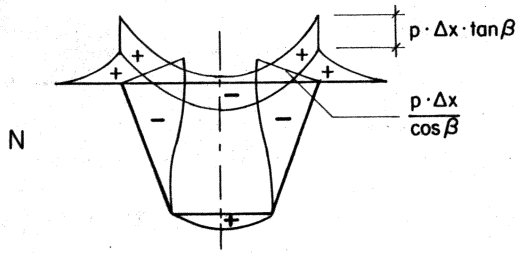


Bild 90 : Kastenträger mit geneigten Stegen, Normalkräfte in Querrichtung infolge oben angreifender symmetrischer Belastung

Zum Beispiel bei Brücken mit stärker geneigten Stegen kann in der Fahrbahnplatte aus Eigengewicht und Nutzlasten eine nicht zu vernachlässigende Zusatzbewehrung erforderlich sein.

Verhältnisse am Trägerende:

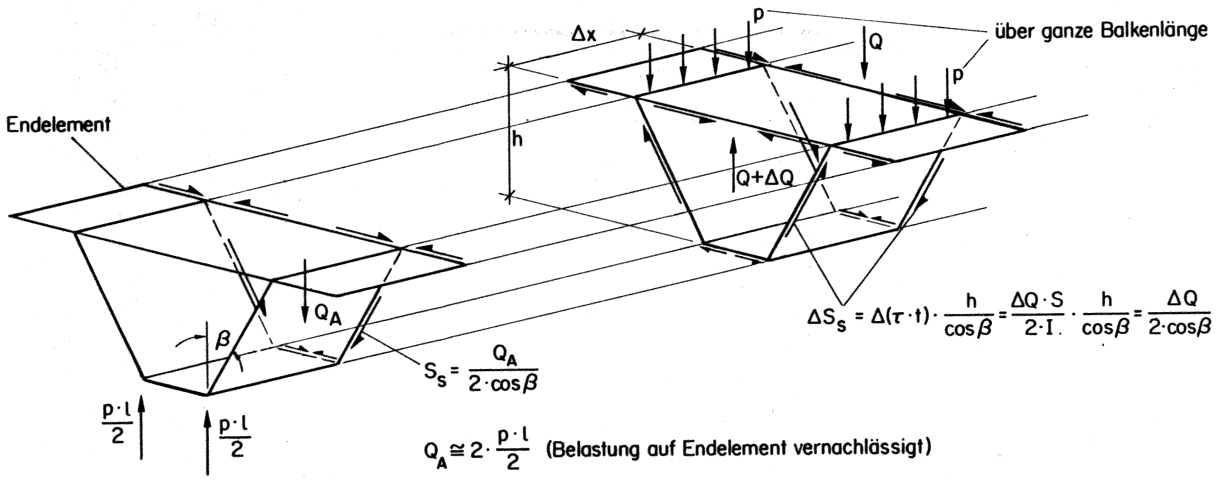


Bild 91 : Kastenträger mit geneigten Stegen, Querbeanspruchung des Endelementes durch symmetrische Belastung

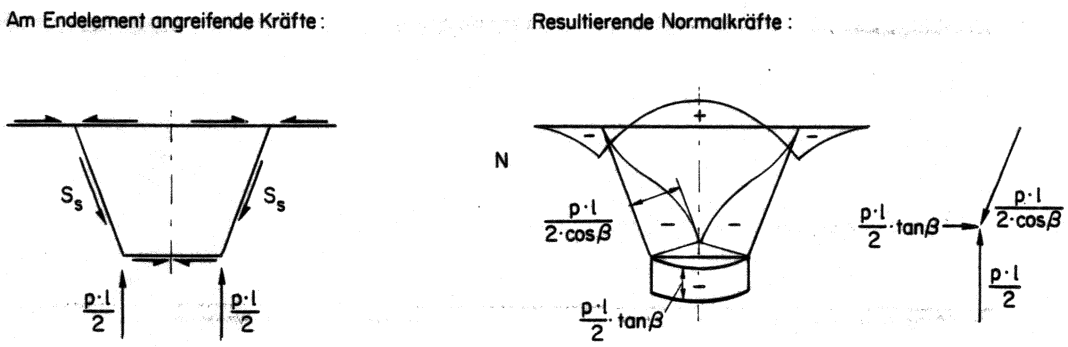


Bild 92: Kastenträger mit geneigten Stegen unter symmetrischer Belastung am Endelement, angreifende Kräfte und Normalkräfte in Querrichtung

Somit entsteht am Trägerende, da die Auflagerkräfte vertikal sind, eine lokale Druckkraft in der unteren Platte. Sie entspricht der Summe der Querzugkräfte in der oberen Platte über die halbe Trägerlänge.

2.5 Einzelliger Querschnitt mit gekrümmten Wänden

Symmetrische Belastung

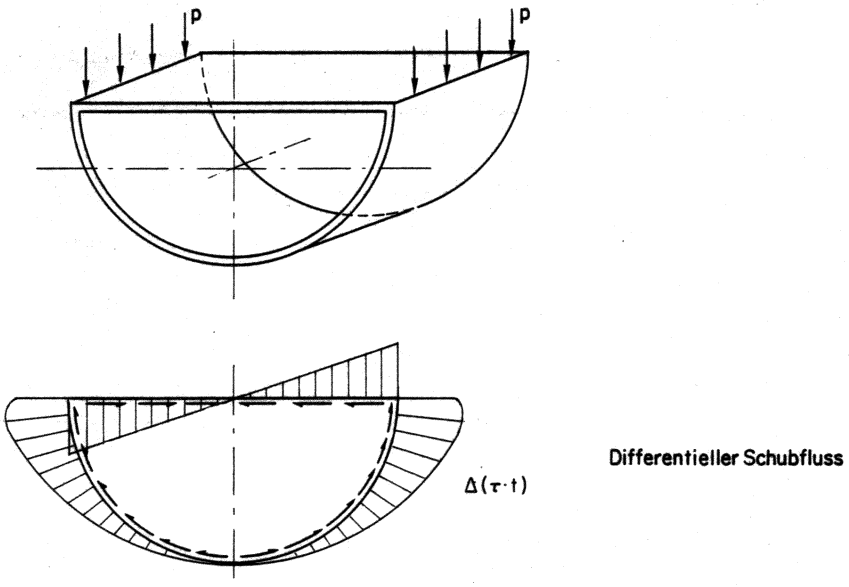


Bild 93: Halbkreisförmiger Kastenquerschnitt, differentieller Schubfluss infolge symmetrischer Belastung

Das Balkenelement kann als geschlossener, statisch unbestimmter Rahmen aufgefasst werden.

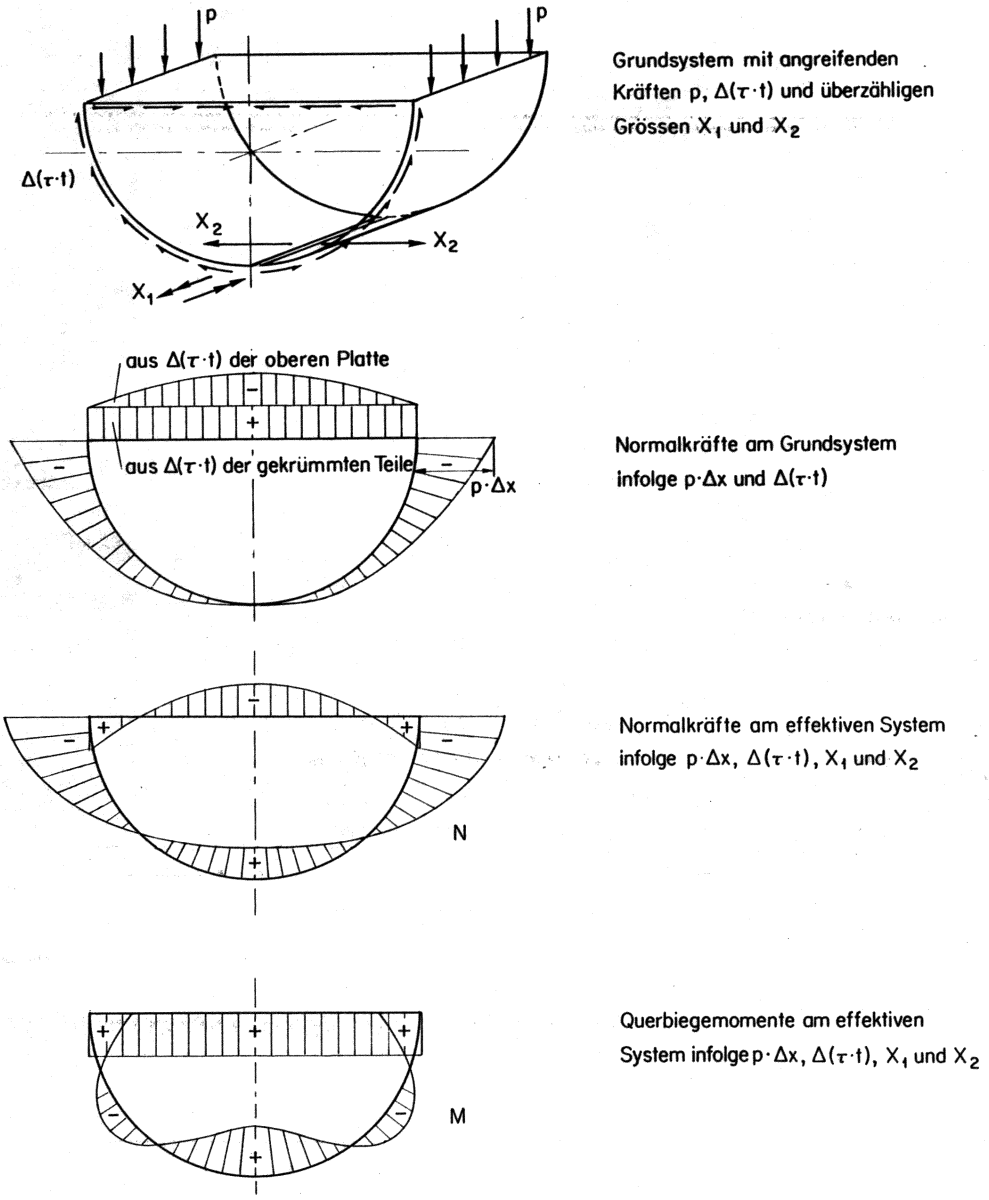
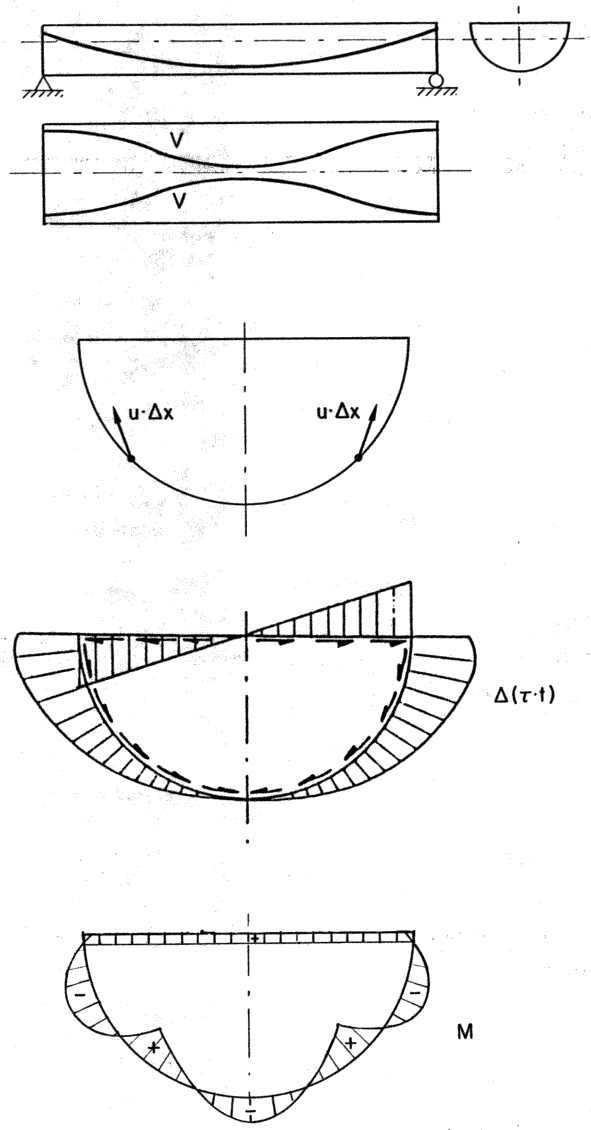


Bild 94 : Halbkreisförmiger Kastenquerschnitt, Beanspruchung in Querrichtung infolge symmetrischer Belastung

In einem Querschnitt mit gekrümmten Teilen entstehen somit Querbiegemomente, die sich z.B. bei dünnwandigen Schalenträgern ungünstig auswirken können.

Symmetrische Vorspannung



Spanngliedform :

- Im Aufriss Parabel
- Im Grundriss Schnittkurve zwischen Schale und parabolischer Fläche

Differentieller Schubfluss infolge $u_V \cdot \Delta x$

Querbiegemomente (Berechnung wie für symmetrische Belastung)

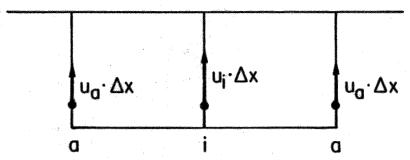
Bild 95: Halbkreisförmiger Kastenquerschnitt, Beanspruchung in Querrichtung infolge Vorspannung

Da die sogenannte Schmiegungsebene des Spanngliedes im allgemeinen nicht mit der Tangentialebene des Balkenelementes zusammenfällt, bilden die Umlenkkräfte des Spanngliedes eine ungünstig wirkende Linienlast, die - zusammen mit dem differentiellen Schubfluss - beträchtliche Querbiegemomente bewirken.

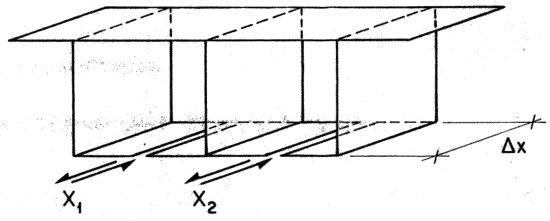
2.6 Mehrzelliger Kastenquerschnitt

Beim mehrzelligen Kastenquerschnitt ist die Berechnung des differentiellen Schubflusses ein statisch unbestimmtes Problem.

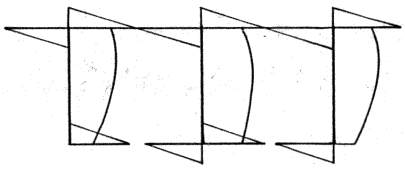
Symmetrische Vorspannung



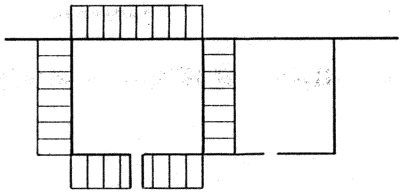
Unterschiedliche Spannglieder in den äusseren Stegen und im inneren Steg



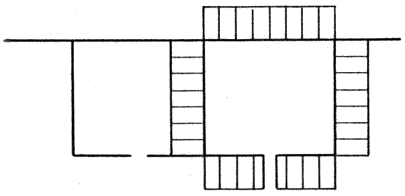
Grundsystem mit überzähligen differentiellen Schubfluss-Grössen X_1 und X_2



Differentieller Schubfluss $\Delta_0(\tau \cdot t)$ infolge $\Delta Q = \Sigma u \cdot \Delta x$ am Grundsystem



Differentieller Schubfluss $\Delta_1(\tau \cdot t)$ infolge X_1 am Grundsystem



Differentieller Schubfluss $\Delta_2(\tau \cdot t)$ infolge X_2 am Grundsystem

Bild 96: Mehrzelliger Kastenquerschnitt, differentieller Schubfluss infolge Vorspannung

Die differentielle Schiebung infolge eines differentiellen Schubflusses kann analog wie die Schiebung infolge eines Schubflusses berechnet werden:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{(\tau \cdot t)}{t \cdot G} \quad \rightarrow \quad \Delta\gamma = \frac{\Delta\tau}{G} = \frac{\Delta(\tau \cdot t)}{t \cdot G}$$

Die Elastizitätsbedingung pro Zelle lautet

$$\delta = 0$$

wobei δ die Relativverschiebung der beiden Schnittkanten infolge der differentiellen Schubflüsse bedeutet.

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

X_1	X_2	$\Delta_o(\tau \cdot t)$
δ_{11}	δ_{12}	δ_{10}
δ_{21}	δ_{22}	δ_{20}

Die einzelnen Verschiebungsgrössen δ_{ik} können mit der Arbeitsgleichung berechnet werden:

$$\delta_{ik} = \oint \underbrace{\frac{\Delta(\tau \cdot t)}{t \cdot G}}_{V.Z.} \cdot \underbrace{\Delta(\overline{\tau \cdot t})}_{B.Z.} \cdot ds$$

V.Z. : Reeller Verschiebungszustand
B.Z. : Virtueller Belastungszustand

Bei Symmetrie in Geometrie und Vorspannung vereinfacht sich das obige Gleichungssystem auf

$$X_1 = X_2 = X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}+\delta_{12}}$$

Pro Steg kann der differentielle Schubfluss zu einer Resultierenden $\Delta S = \Delta(\tau \cdot t) \cdot h$ zusammengefasst werden. Im allgemeinen wird diese differentielle Schubflusskraft ΔS eines bestimmten Steges nicht gleich der dortigen Umlenkkraft $u \cdot \Delta x$ sein, was Querbiegemomente verursacht (Bild 97).

Sofern die Stege wesentlich dicker und kürzer, d.h. querbiegesteifer, als die Flanschen sind, ergibt sich das maximale Querbiegemoment in der oberen Rahmenecke zu

$$M_{max} \simeq (u_a \cdot \Delta x - \Delta S_a) \frac{I_o}{I_o + I_u} \cdot \frac{c}{2}$$

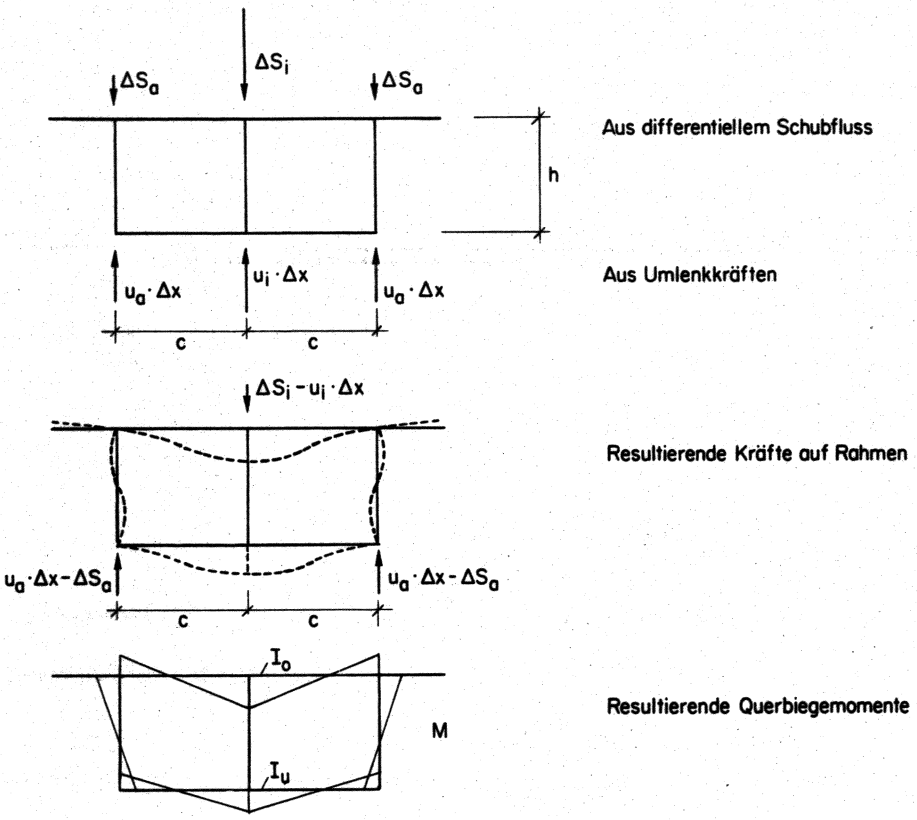


Bild 97: Mehrzelliger Kastenquerschnitt, Beanspruchung in Querrichtung infolge Vorspannung

Symmetrische Belastung

Eine analoge Betrachtung wie für die Vorspannung kann z.B. für eine ständige Belastung g gemacht werden. Es resultieren für die äusseren Stege die Kräfte

$$g_a \cdot \Delta x - \Delta S_a \quad ,$$

und für den inneren Steg

$$\Delta S_i - g_i \cdot \Delta x \quad .$$

Symmetrische Belastung und symmetrische Vorspannung

Durch geschickte Verteilung der Spannglieder auf die Stege kann einer Querbiegung unter ständiger Last entgegengewirkt werden. Eine querbiegungsfreie Lösung ergibt sich für $u_a = g_a$, $u_i = g_i$.

2.7 Offener Querschnitt

Beim offenen Querschnitt ist die Annahme von der Erhaltung der Querschnittsform von besonderer Bedeutung. Effektiv ergibt sich eine starke Tendenz zur Verformung des Querschnittes.

Symmetrische Vorspannung

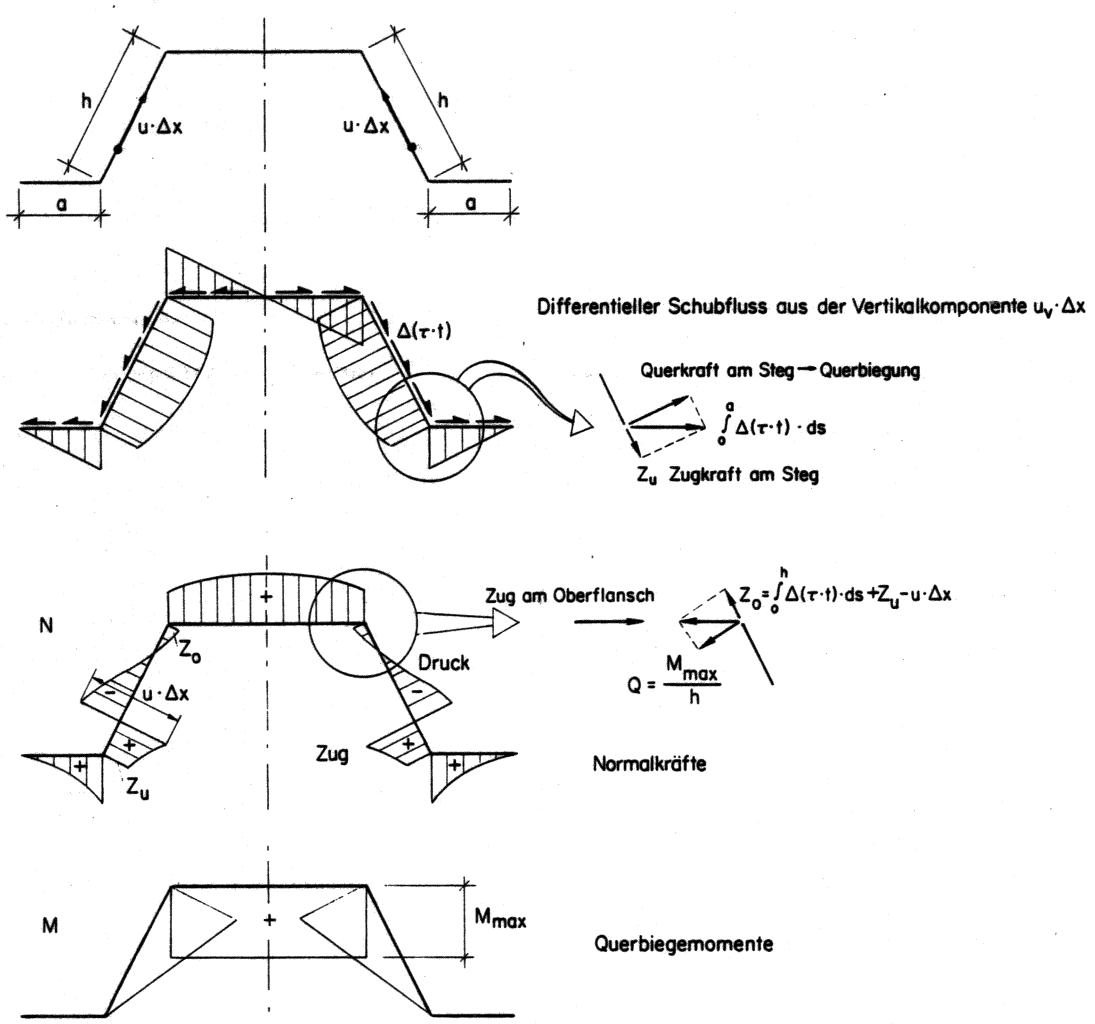


Bild 98: Offener Querschnitt, Beanspruchung in Querrichtung infolge Vorspannung

Der Querschnitt hat die Tendenz, sich zu öffnen!

Symmetrische Belastung

Das Ergebnis ist - bei umgekehrten Vorzeichen - ähnlich demjenigen infolge symmetrischer Vorspannung. Der Querschnitt hat die Tendenz, sich zu schliessen, d.h. die Unterflanschen biegen sich bei Belastung von oben horizontal und gegeneinander durch.

2.8 Gekrümmter Träger

Im 1. Kapitel wurde bei der Betrachtung der Längsbeanspruchungen festgestellt, dass die Schnittkräfte infolge Vorspannung bei einem gekrümmten Stab die gleichen sind wie bei einem analogen geraden Stab (3. Satz). Bei Betrachtung der Querbeanspruchungen hingegen entstehen infolge Vorspannung Wirkungen, die bei einem analogen geraden Stab nicht auftreten.

Rechteckquerschnitt mit Vorspannung

Querzug bei vertikaler Trägerkrümmung

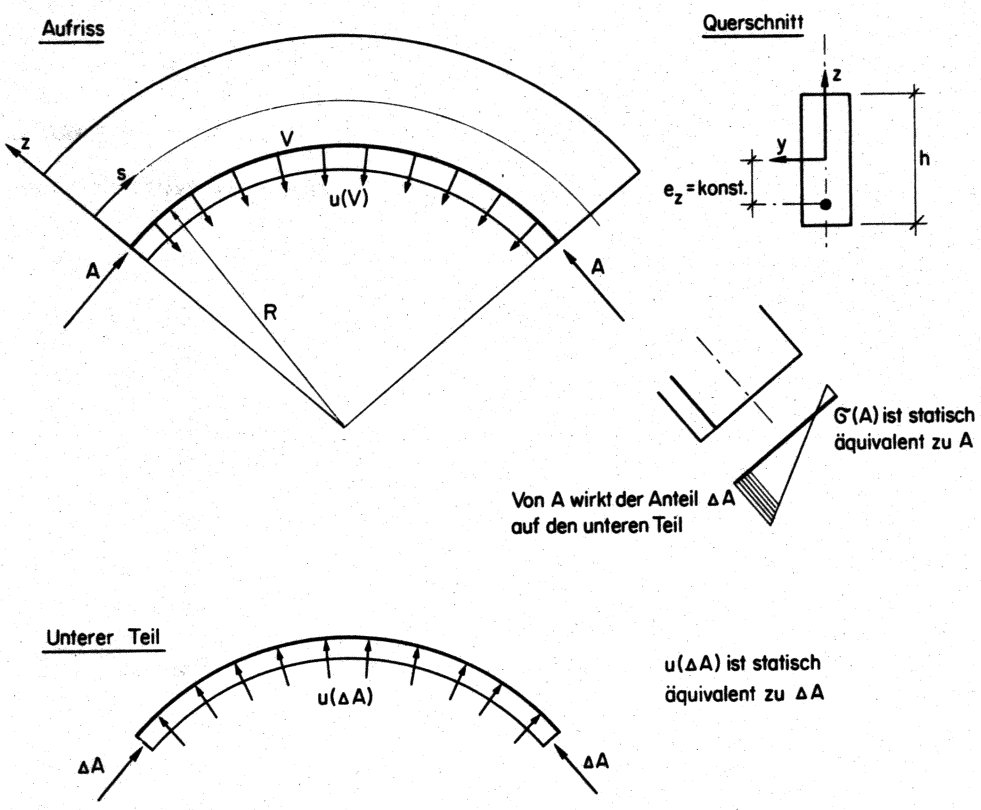


Bild 99: Gekrümmter Träger, Querzug infolge Vorspannung

Denkt man sich den unteren Teil inkl. Spannglied abgetrennt, so wirken darauf die folgenden Kräfte:

- Umlenkkräfte u(V) des Spanngliedes
- Anteile ΔA der Ankerkräfte A bzw. die hiezu statisch äquivalenten Umlenkkräfte u(ΔA)
- Bügelkräfte $Z_B = Z$

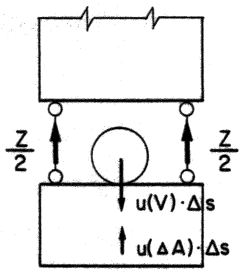


Bild 100: Modell für den unteren Bereich des gekrümmten Trägers mit Kräften pro Stabelement Δs

Die Bügelkraft pro Stabelement Δs ergibt sich zu

$$\underline{Z_B = Z} = u(V)\cdot\Delta s - u(\Delta A)\cdot\Delta s \simeq u(V-\Delta A)\cdot\Delta s = \underline{\frac{1}{R}\cdot(V-\Delta A)\cdot\Delta s}$$

Anschauliche Erklärung:
Der untere Teil wird von oben durch $u(V)\cdot\Delta s$ "belastet", aber nur durch ΔA bzw. $u(\Delta A)\cdot\Delta s$ "gestützt". Daher braucht es die Bügelkräfte $Z_B = Z$ damit der untere Teil im Gleichgewicht ist.

$Z_B = Z$ je nach Kabellage:

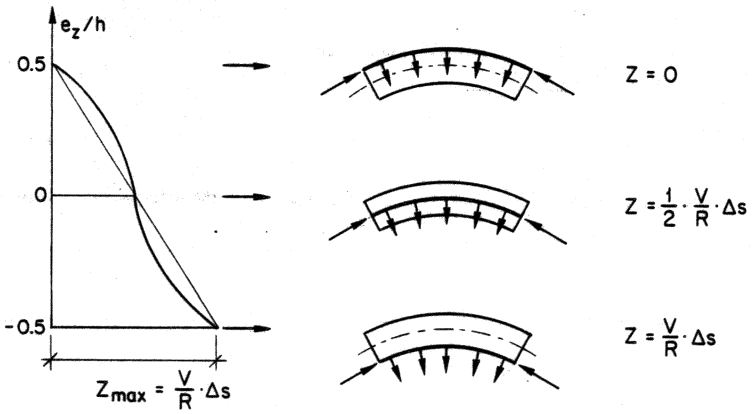


Bild 101: Gekrümmter Träger, Querzug in Abhängigkeit von der Spanngliedlage

Querzug bei horizontaler Trägerkrümmung

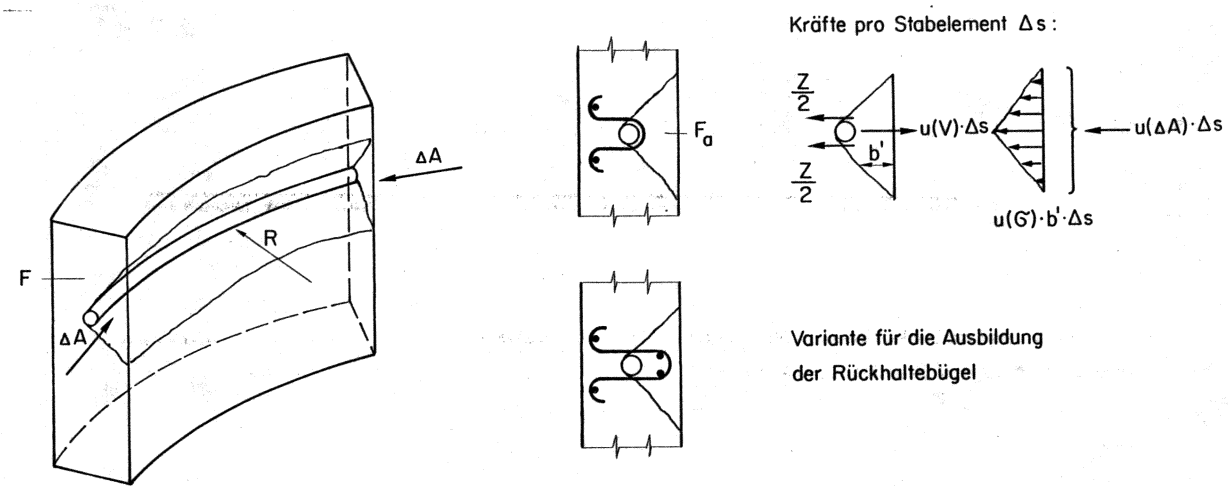


Bild 102: Gekrümmter Träger, Querzug infolge Vorspannung und konstruktive Details

Denkt man sich den ausbruchgefährdeten Teil abgetrennt (Modell), so wirken darauf die folgenden Kräfte:

- Umlenkkräfte u(V) des Spanngliedes
- Anteile ΔA der Ankerkräfte A bzw. die hiezu statisch äquivalenten Umlenkkräfte u(ΔA), die auch durch die Umlenkspannungen u(σ) der Normalspannungen σ(V) ausgedrückt werden können:

$$u(\Delta A) = \int_{F_a} u(\sigma) \cdot dF$$

$$u(\sigma) = \frac{\sigma(V)}{R}$$

F_a : Querschnittsfläche des ausbruchgefährdeten Teils

- Bügelkräfte $Z_B = Z$

Die stützenden Umlenkkräfte u(ΔA) sind verhältnismässig klein. Bei zentrischem Spannglied betragen sie nur

$$u(\Delta A) = u(V) \cdot \frac{F_a}{F}$$

F : Fläche des gesamten Querschnittes, über den die Spannungen aus Vorspannung verteilt sind.

Somit ergibt sich die Bügelkraft pro Stabelement Δs zu

$$Z_B = Z \simeq u(V) \cdot \Delta s \ .$$

Dies bedeutet, dass praktisch <u>die gesamten Umlenkkräfte des Spanngliedes durch Bügel in möglichst kleinen Abständen zurückverankert werden müssen.</u>

Dabei können die Rückhaltebügel entweder satt um das Hüllrohr herumgeführt oder als eigentliche Querbügel ausgebildet werden.

Querbiegung bei horizontaler Trägerkrümmung und zentrischer Spanngliedlage

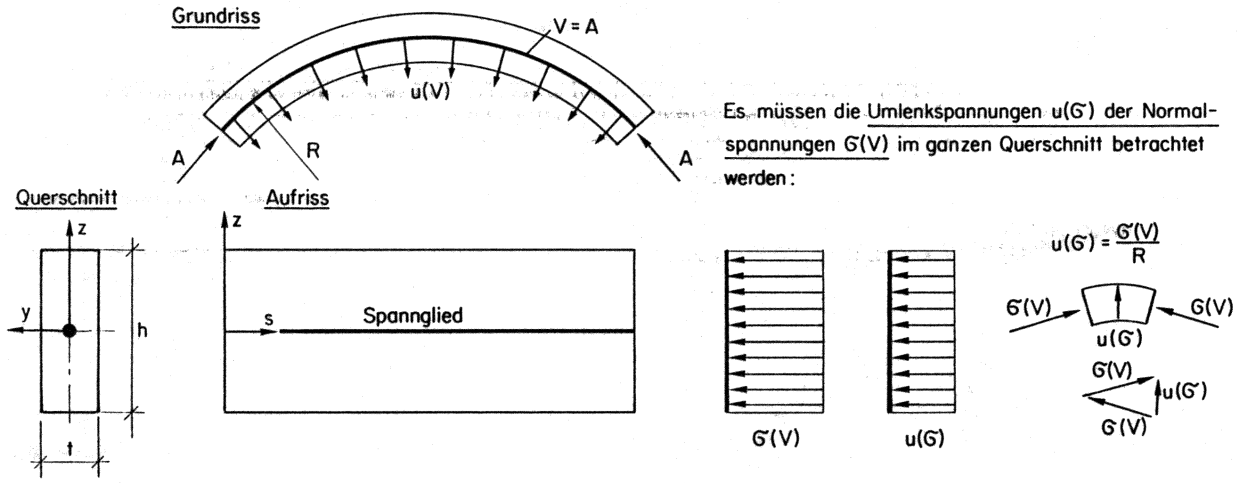


Bild 103: Gekrümmter Träger mit zentrischem Spannglied, resultierende Umlenkkräfte

Betrachtung eines Stabelementes Δs mit quer zur Stabachse angreifenden Kräften:

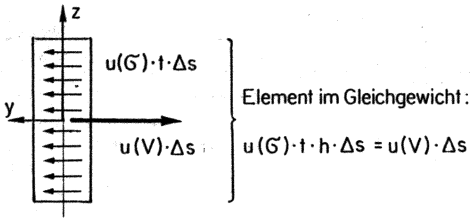
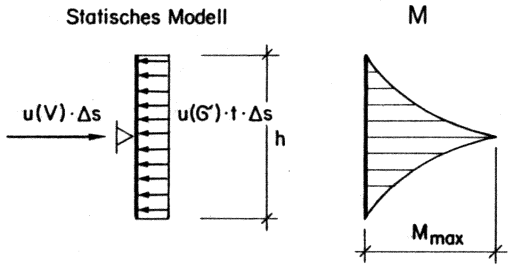


Bild 104: Gekrümmter Träger mit zentrischem Spannglied, Gleichgewicht am Stabelement

Waagbalken-Modell mit Belastungen und Biegemoment:



$$M_{max} = u(\sigma)\cdot t\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4}\cdot\Delta s = \frac{u(V)}{h}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{4}\cdot\Delta s = u(V)\cdot\frac{h}{8}\cdot\Delta s$$

Bild 105: Gekrümmter Träger mit zentrischem Spannglied, statisches Modell und Querbiegemomente

Querbiegung bei horizontaler Trägerkrümmung und exzentrischer oder variabler Spanngliedlage

Bei exzentrischer Spanngliedlage verläuft das Querbiegemoment unsymmetrisch über die Querschnittshöhe. Bei längs der Stabaxe variabler Spanngliedlage ergibt sich zudem ein längs der Stabaxe variabler Verlauf des Querbiegemomentes.

Es wird wiederum ein Stabelement Δs des gekrümmten Trägers betrachtet mit den Wirkungen

- der Umlenkkräfte $u(V)$ des Spanngliedes sowie
- der Umlenkspannungen $u(\sigma)$ der Normalspannungen $\sigma(V)$.

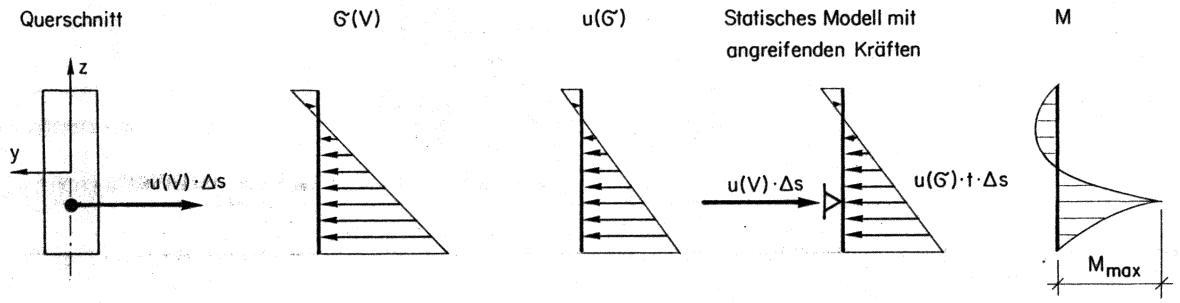


Bild 106: Gekrümmter Träger mit exzentrischem Spannglied, Gleichgewicht am Stabelement, statisches Modell und Querbiegemomente

Das Querbiegemoment ergibt sich auf analoge Weise wie bei zentrischer Spanngliedlage.

I-Querschnitt mit Vorspannung

Querbiegung

Der ungünstigste Fall, d.h. das grösste Querbiegemoment, ergibt sich für zentrische Spanngliedlage und bei Vernachlässigung der Umlenkspannungen $u(\sigma)$ im Steg:

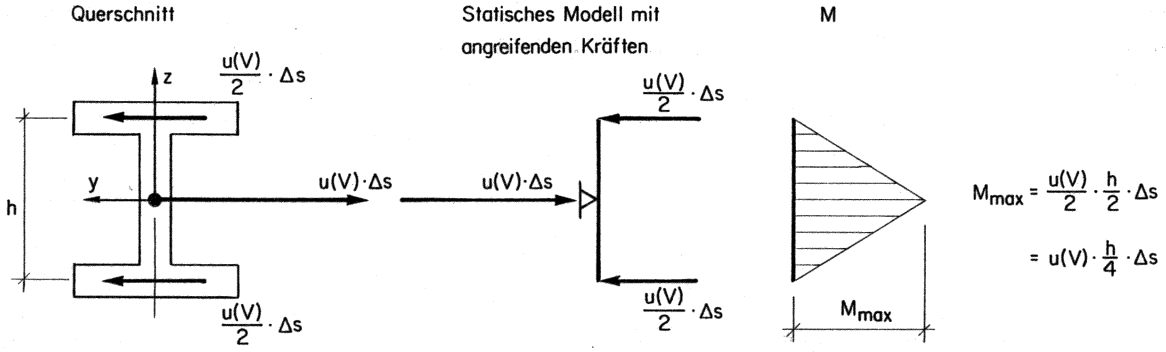
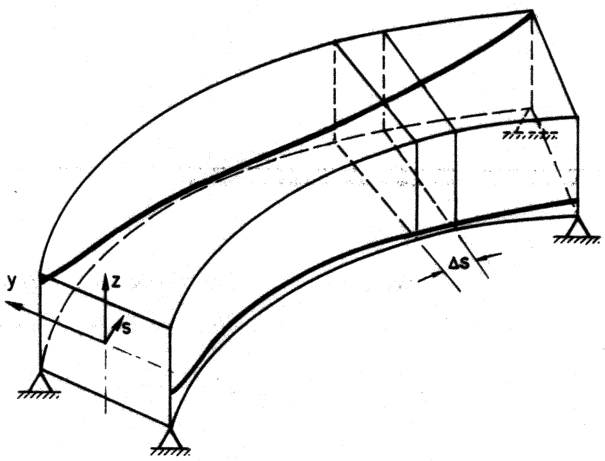


Bild 107: Gekrümmter I-Träger mit zentrischem Spannglied, Gleichgewicht am Stabelement, statisches Modell und Querbiegemomente

Kastenquerschnitt mit unsymmetrischer Vorspannung

Querbiegung



Annahmen:

Das hintere Spannglied sei stärker gekrümmt als das vordere Spannglied (vgl. 1. Kap., Grundfall 7).
Beide Spannglieder haben die gleiche Vorspannkraft.

Bild 108: Gekrümmter Kastenträger mit unsymmetrischer Vorspannung

Die Einflüsse der horizontalen und der vertikalen Umlenkkräfte können getrennt behandelt werden.

Einfluss der horizontalen Umlenkkräfte:

Es kann wiederum ein Stabelement Δs des gekrümmten Trägers betrachtet werden mit den Wirkungen

- der Umlenkkräfte u(V) der beiden Spannglieder sowie
- der Umlenkspannungen $u(\sigma)$ der Normalspannungen $\sigma(V)$.

Beispiel gerechnet mit den folgenden Angaben:

- Kastenquerschnitt wie in Bild 59
- $R = 50$ m, $\varphi_o = \varphi_{Gr} = 32^o$, $l = 27.9$ m
- $V_v = V_h = 7070$ kN, $u(V) = 141.4$ kN/m'
- Querbeanspruchung im Trägerachtelspunkt ($\varphi = 4^o$) ermittelt.

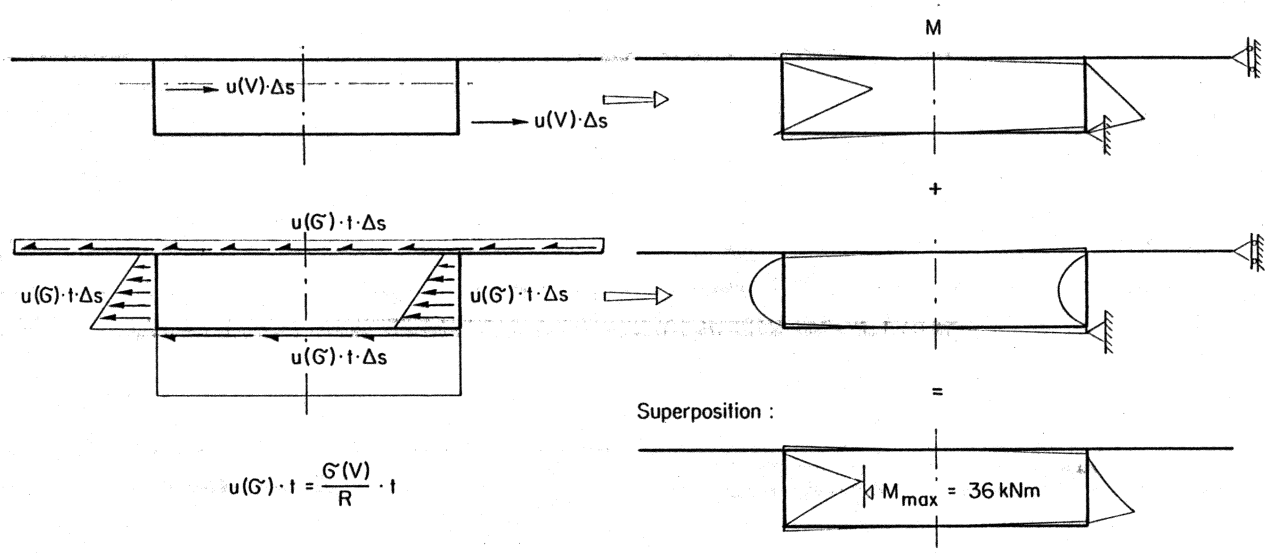


Bild 109 : Gekrümmter Kastenträger mit unsymmetrischer Vorspannung, Querbiegung infolge der horizontalen Umlenkkräfte

Bei gekrümmten Trägern dürfen somit die durch unsymmetrische Vorspannung bewirkten Querbiegemomente im allgemeinen nicht vernachlässigt werden.

Einfluss der vertikalen Umlenkkräfte:

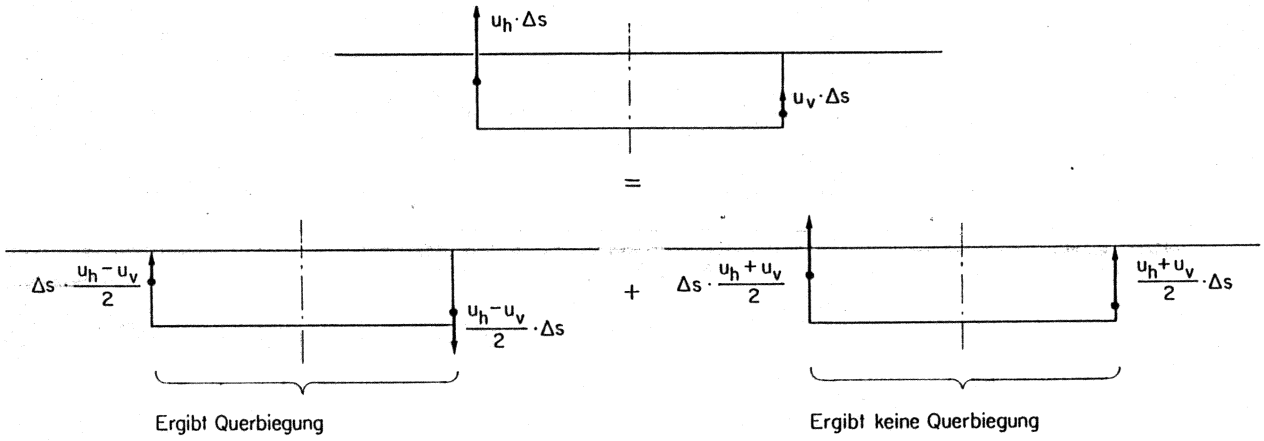


Bild 110: Gekrümmter Kastenträger mit unsymmetrischer Vorspannung, Querbiegung infolge der vertikalen Umlenkkräfte

Der Einfluss der vertikalen Umlenkkräfte am gekrümmten Träger ist der gleiche wie am analogen geraden Träger. Die Querbiegung kann nach Abschnitt 2.3 mit Hilfe des differentiellen Schubflusses aus der Aenderung des Torsionsmomentes ermittelt werden.

Kastenquerschnitt mit symmetrischer Belastung

Querbiegung

Einfluss der horizontalen Umlenkkräfte:
Es kann wiederum ein Stabelement Δs des gekrümmten Trägers betrachtet werden mit den Wirkungen

- Differentieller Schubfluss $\Delta(\tau \cdot t)$ aus der Aenderung des Torsionsmomentes
- Umlenkspannungen $u(\sigma)$ der Normalspannungen $\sigma(p)$.

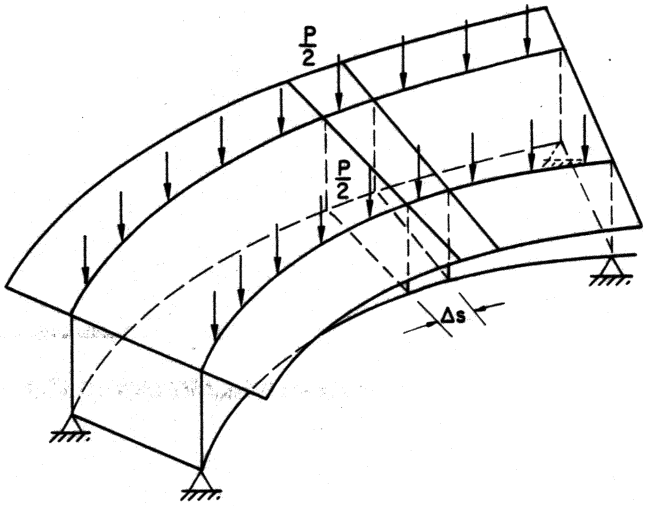


Bild 111 : Gekrümmter Kastenträger mit symmetrischer Belastung

Beispiel gerechnet mit den folgenden Angaben:

- Kastenquerschnitt wie in Bild 59
- $R = 50$ m, $\varphi_o = \varphi_{Gr} = 32^o$, $l = 27.9$ m
- $p = 160$ kN/m
- Querbeanspruchung in Trägermitte ($\varphi = 16^o$) ermittelt.

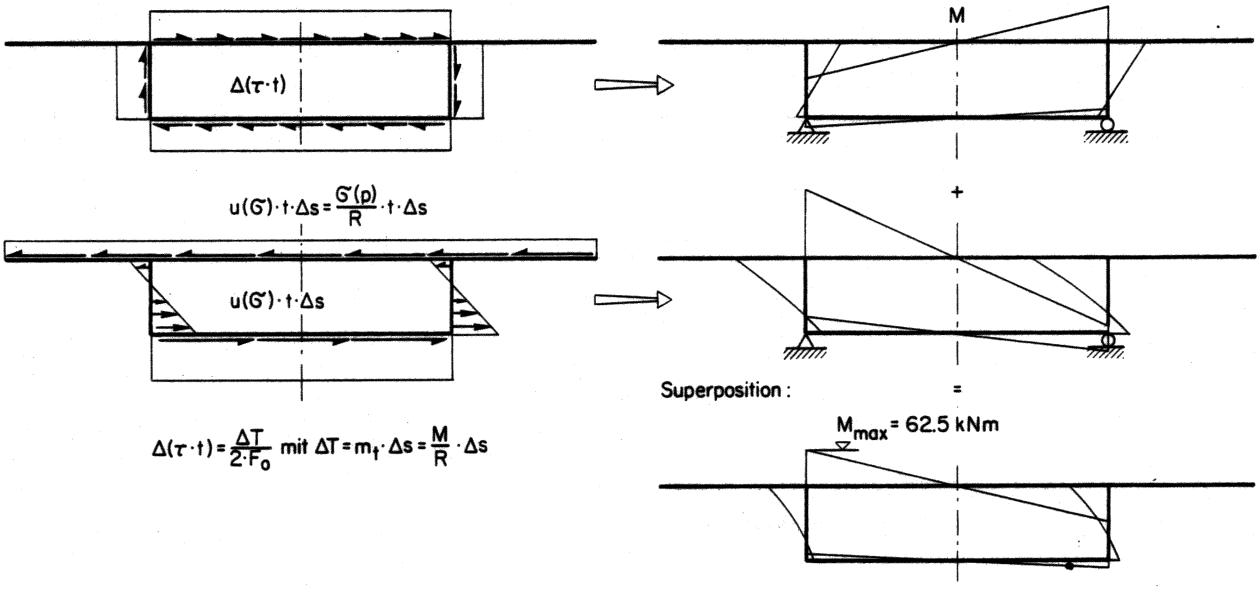


Bild 112: Gekrümmter Kastenträger mit symmetrischer Belastung, Querbiegung infolge der horizontalen Umlenkkräfte

Bei gekrümmten Trägern dürfen somit die durch die äussere Belastung bewirkten Querbiegemomente im allgemeinen nicht vernachlässigt werden. Sie werden auch durch eine formtreue Längsvorspannung nicht kompensiert.

2.9 Kastenträger mit gekrümmter Druckplatte

Bei Trägern, die einen in Längsrichtung gekrümmten Flansch aufweisen, wie z.B. bei Freivorbaubrücken mit gekrümmter Druckplatte, treten ähnliche Querbiegebeanspruchungen auf wie bei gekrümmten Trägern.

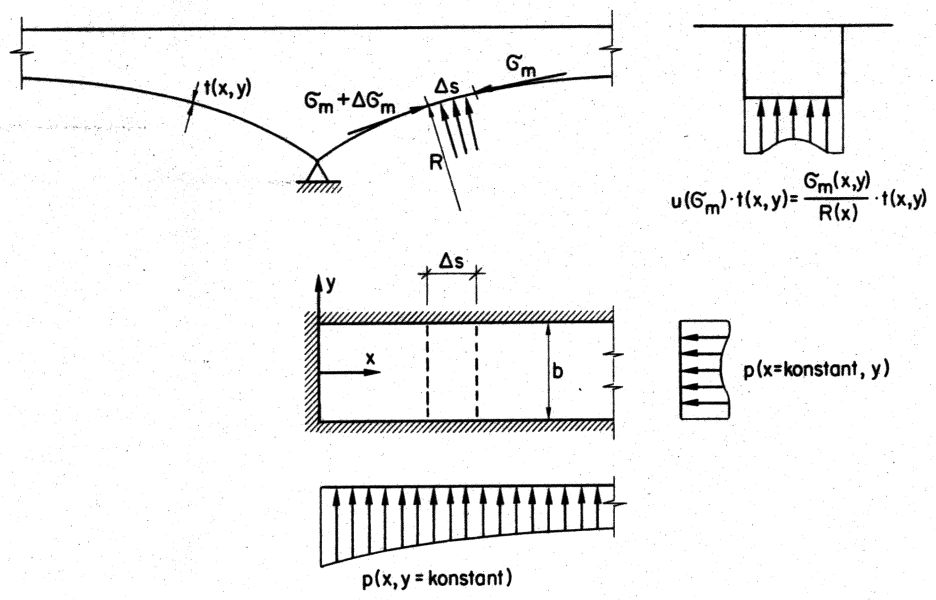


Bild 113 : Kastenträger mit gekrümmter Druckplatte, Umlenkkräfte infolge Richtungsänderung der Betondruckkräfte

Die Umlenkkräfte

$$p(x,y) = u(\sigma_m)\cdot t(x,y) = \frac{\sigma_m(x,y)}{R(x)}\cdot t(x,y) \ ,$$

mit $\sigma_m(x,y)$ = mittlere Druckspannung über die Plattendicke $t(x,y)$,

bilden eine Flächenbelastung auf den Plattenhalbstreifen.

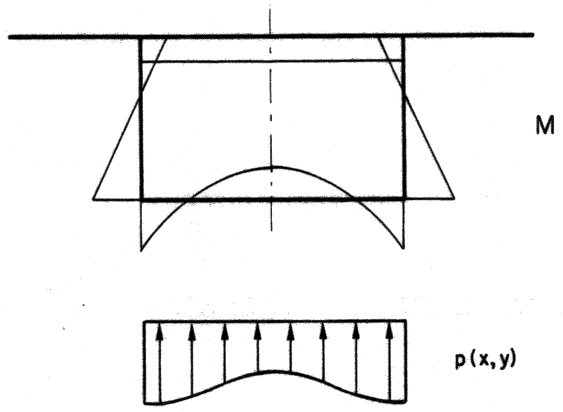


Bild 114: Kastenträger mit gekrümmter Druckplatte, Querbiegemomente aus Umlenkkräften infolge Richtungsänderung der Betondruckkräfte

Das Querbiegemoment in der Druckplatte kann näherungsweise am beidseitig eingespannten Stab ermittelt werden. Es muss jedoch auch die Weiterleitung des Einspannmomentes in die Stege beachtet werden (Rahmen).

Literaturverzeichnis

[1] Egger H., Zellner W.: "Zur Spanngliedführung in gekrümmten Balken". Beitrag zu "Stahlbau und Baustatik - Aktuelle Probleme", Springer Verlag Wien 1965.

[2] Egger H.: "Torsion und Vorspannung bei gekrümmten Balken". Bauingenieur-Praxis, Heft 39, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin und München 1968.

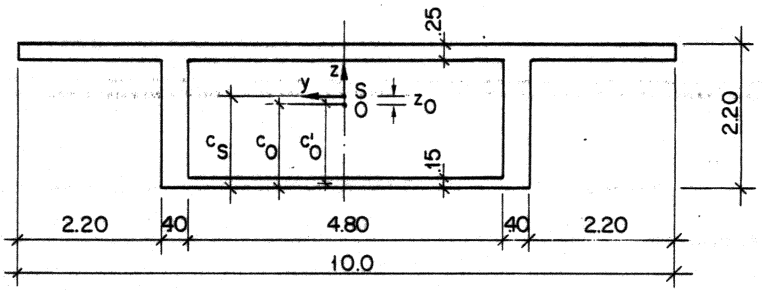
[3] Vreden W.: "Die Berechnung des gekrümmten Durchlaufträgers". Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin und München 1964.

[4] Wittfoht H.: "Kreisförmige gekrümmte Träger mit exzentrischer Belastung". Der Bauingenieur, Heft 1, 1968, S. 15-20.

[5] Anderheggen E., Bazzi G., Müller P., Theiler J., Walder U.: "Programm STATIK". Institut für Informatik, ETH Zürich, 1977.

Anhang: Berechnung der Lage des Schubmittelpunktes

Beispiel: Symmetrischer Kastenquerschnitt



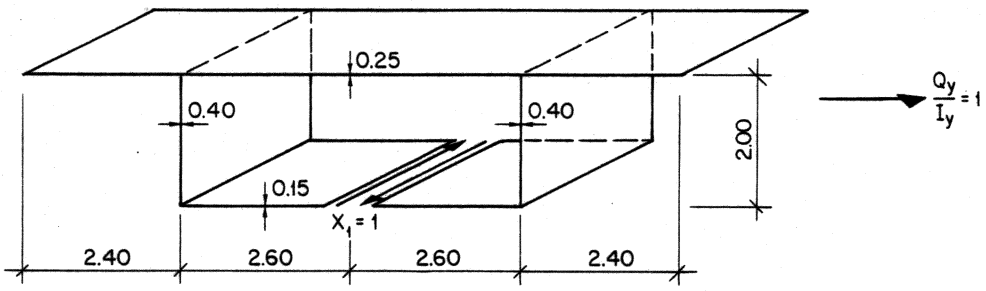
Lage des Schwerpunktes

$$c_S = \frac{10 \cdot 0.25 \cdot 2.075 + 1.80 \cdot 0.40 \cdot 1.05 \cdot 2 + 5.60 \cdot 0.15 \cdot 0.075}{10 \cdot 0.25 + 1.80 \cdot 0.40 \cdot 2 + 5.60 \cdot 0.15}$$

$$\underline{c_S} = \frac{6.7625\ m^3}{4.78\ m^2} = \underline{1.415\ m}$$

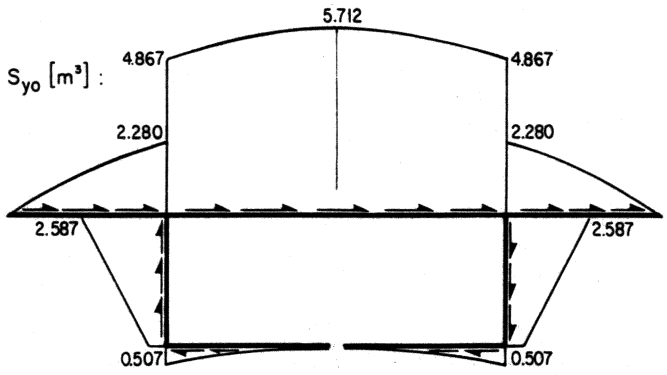
Lage des Schubmittelpunktes

Grundsystem mit überzähliger Grösse = überzähligem Schubfluss $X_1 = 1$ und vereinfachter Geometrie zur Berechnung von S_y

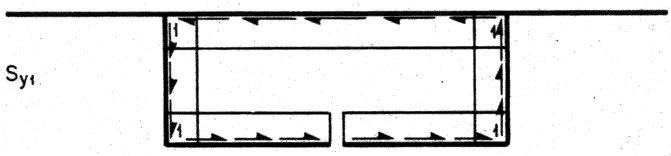


- Schubfluss $\tau \cdot t$ infolge $\frac{Q_y}{I_y} = 1$ am Grundsystem:

$$\tau \cdot t = \frac{Q_y}{I_y} \cdot S_y = S_{yo}$$



- Schubfluss infolge $X_1 = 1$ am Grundsystem:



- Verträglichkeit:

$$\int \gamma \cdot ds = \int \frac{\tau}{G} \cdot ds = \int \frac{S_y}{t_i \cdot G} \cdot ds = 0$$

$$\rightarrow \oint \frac{S_{yo}}{t_i} \cdot ds + \oint \frac{S_{y1}}{t_i} \cdot ds = 0$$

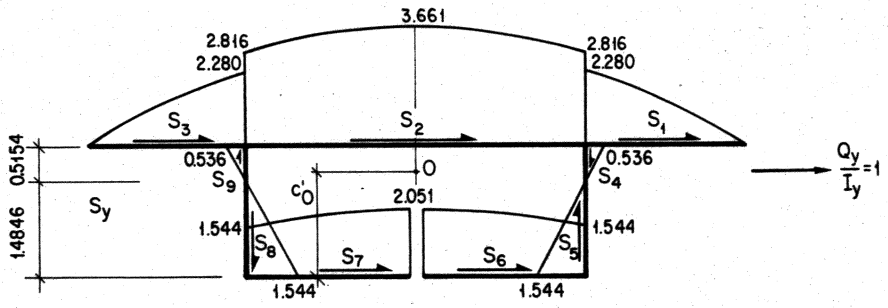
$$\frac{1}{2} \cdot \oint \frac{S_{yo}}{t_i} \cdot ds = \frac{0.507 \cdot 2.60}{3 \cdot 0.15} + \frac{0.507 + 2.587}{2 \cdot 0.40} 2.0 + \frac{4.867 \cdot 2.60}{0.25} + \frac{2 \cdot 0.845 \cdot 2.60}{3 \cdot 0.25} = 67.140$$

$$\frac{1}{2} \cdot \oint \frac{S_{y1}}{t_i} \cdot ds = -\frac{2.60}{0.15} \cdot X_1 - \frac{2.0}{0.40} \cdot X_1 = \frac{2.60}{0.25} \cdot X_1 = -32.733 \cdot X_1$$

$$X_1 = \frac{67.140}{32.733} = 2.0511$$

- Schubfluss $\tau \cdot t$ infolge $\frac{Q_y}{I_y} = 1$ am wirklichen System:

$$\tau \cdot t = S = S_{yo} + X_1 \cdot S_{y1}$$



- Aufsummierte Schubkräfte:

$$S_1 = S_3 = \frac{0.60}{3} \cdot (2.28 + 4 \cdot 1.845 + 2 \cdot 1.32 + 4 \cdot 0.705) = 3.024$$

$$S_2 = 2.816 \cdot 5.20 + \frac{2}{3} \cdot 5.20 \cdot 0.845 = 17.5725$$

$$S_4 = S_9 = \frac{1}{2} \cdot 0.536 \cdot 0.5154 = 0.1381$$

$$S_5 = S_8 = \frac{1}{2} \cdot 1.544 \cdot 1.4846 = 1.1461$$

$$S_6 = S_7 = 1.544 \cdot 2.60 + \frac{2}{3} \cdot 0.507 \cdot 2.60 = 4.8932$$

- Momentenbedingung bezüglich Schubmittelpunkt O:

$$(S_1+S_2+S_3)\cdot(2.0-c_0') + (S_4+S_9)\cdot 2.60 - (S_6+S_7)\cdot c_0' = 0$$

$$c_0' = \frac{(S_4+S_9)\ 2.60 - (S_5+S_8)\ 2.60 + (S_1+S_2+S_3)\ 2.0}{S_1 + S_2 + S_3 + S_6 + S_7}$$

$$c_0' = \frac{2\cdot 0.1381\cdot 2.60 - 2\cdot 1.1461\cdot 2.60 + (2\cdot 3.024+17.5725)\cdot 2}{2\cdot 3.024 + 17.5725 + 2\cdot 4.8932}$$

$$c_0 = c_0' + 0.075 \underline{= 1.332\ \text{m}}$$